# CHAPTER ONE

## ((Mathematical Principles))

### Theorem

If the square of one side of a triangle is equal to the sum of the squares of the other sides then the triangle is a right triangle.

**قضیه**

اگر مربع یک ضلع از یک مثلث برابر مجموع مربعات اضلاع دیگر باشد آنگاه آن مثلث، قائم‌الزاویه است.

**Theorem:** If the square of the longest side of a triangle is greater than the sum of the squares of the other two sides then the triangle is an **obtuse triangle**.

**قضیه:** اگر مربع بلندترین ضلع یک مثلث از مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن بزرگتر باشد آنگاه آن مثلث یک **مثلث منفرجه** است.

**Theorem:** If the square of the longest side of a triangle is less than the sum of the squares of the other two sides then the triangle is an **acute triangle**.

**قضیه:** اگر مربع بزرگترین ضلع یک مثلث کوچکتر از مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد آنگاه آن مثلث یک **مثلث حاده** است.

**The Pythagorean Theorem:** In a right triangle, the square of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the legs.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

**قضیه فیثاغورث**. در یک مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر برابر مجموع مربعات اضلاع قائم است.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

### Definition of an inductive set

A set of real numbers is called an **inductive set** if it has the following two properties:

a) The number 1 is in the set. b) For every $x$ in the set, the number $x+1$ is also in the set

For example, $\mathbb{R}$ is an inductive set, So $\mathbb{N}$ is an inductive set.

**تعریف مجموعه استقرایی**

یک مجموعه از اعداد حقیقی، **مجموعه استقرایی** نام دارد اگر دو ویژگی زیر را داشته باشد:

الف) عدد ۱ در مجموعه باشد. ب) برای هر $x$ در مجموعه، $x+1$ نیز در مجموعه باشد.

مثلاً، $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) یک مجموعه استقرایی است. بنابراین $\mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی) نیز یک مجموعه استقرایی است.

### The Language of Mathematics

There are several words on our everyday language which are also used on mathematics. Words like **true, false, not, and, or, implies, if and only if, all, some, none**, etc, are all everyday words that are essential to the mathematician's formal language. Most of us feel that we know the meanings of these words. In order to be sure that we all attach the same meaning to these words we will attempt to define some of them precisely. You will find that the clarification of some of the above-mentioned words will make your study of mathematics more precise, and we hope clearer and more enjoyable. For example, we hope to simplify later discussions concerning inequalities by the use of the notions developed in this chapter.

The basic building blocks of mathematical statements are sentences which are either true or false. We call such sentences **prpositions.**

## زبان ریاضی

در زبان روزمره‌ی ما چندین واژه هست که در ریاضیات هم استفاده می‌شود. کلماتی همچون **درست، غلط، نقیض، و، یا، دلالت می‌کند، اگر و فقط اگر، همه، برخی، هیچ‌یک** و .... همگی کلمات روزمره‌ای هستند که برای زبان رسمی ریاضیدانان، اساسی هستند. بیشتر ما احساس می‌کنیم که معنی این کلمات را می‌دانیم. به منظور این که مطمئن شویم همگی معنای یکسانی را به این واژگان نسبت می‌دهیم، تلاش خواهیم کرد برخی از آن‌ها را به دقت تعریف کنیم.

شما درخواهید یافت که شفاف کردن برخی از کلمات فوق، مطالعه ریاضی را برای شما دقیق‌تر، واضح‌تر و لذت‌بخش‌تر خواهد کرد. مثلاً، امیدواریم مباحث بعدی که مرتبط با نامساوی‌ها است، با کمک مفاهیمی که در این فصل گسترش یافته‌اند، ساده‌سازی شوند. عناصر اصلی سازنده‌ی عبارات ریاضی، جملاتی هستند که یا درست هستند یا غلط. ما این جملات را **گزاره** می‌نامیم.

Most theorems in mathematics involve something more than simple propositions and connectives of the type we have been discussing. For example, probably you have frequently seen a statement similar to the following:

$$a+b=b+a$$

Where a and b are natural numbers (that is, 1 , 2, 3, ...). We do not mean to say that $a+b=b+a$ for a particular of numbers a and b, but that $a+b=b+a$ for any pair of natural numbers at all. We usually indicate this by saying that for all natural numbers a and b, $a+b=b+a$

The word **all** or **for all** is called the **universal quantifier**. Frequently the reader of mathematics is expected to provide the universal quantifier himself. The authors will just assume that the reader will do this.

بیشتر قضایا در ریاضیات، شامل چیزی بیش از گزاره‌های ساده و رابط‌ها از نوعی که بحث کرده‌ایم، می‌باشند. مثلاً، احتمالاً شما به طور مکرر عبارتی شبیه به این دیده‌اید:

$$a+b=b+a$$

که در آن a و b اعداد طبیعی هستند (یعنی ۱، ۲، ۳، ....). ما قصد نداریم بگوییم $a+b=b+a$ برای اعداد خاص a و b برقرار است، بلکه می‌گوییم $a+b=b+a$ برای هر جفت از اعداد طبیعی برقرار است. معمولاً این را با گفتن این که به ازای همه اعداد طبیعی a و b ،

$$a+b=b+a$$

خاطرنشان می‌کنیم.

واژه **همه** یا **به ازای هر**، **سور عمومی** نامیده می‌شود. به طور مکرر از خواننده‌ی ریاضی انتظار می‌رود خود سور عمومی را به کار برد. مؤلفین فرض می‌کنند، خواننده خودش این کار را انجام می‌دهد.

You were to interpret $p \wedge q = q \wedge p$

to mean that $p \wedge q = q \wedge p$ for all propositions. In fact the choice of the letters was arbitrary. If r and s are propositions, then we know from the above that $r \wedge s = s \wedge r$ . Furthermore

$$(x<5) \wedge (x>3) = (x>3) \wedge (x<5).$$

In general, $p \wedge q = q \wedge p$ for any propositions p and q.

شما می‌بایست

$$p \wedge q = q \wedge p$$

را به این صورت تفسیر می‌کردید که به ازای همه‌ی گزاره‌ها $p \wedge q = q \wedge p$. در واقع انتخاب حروف دلخواه بود. اگر r و s گزاره باشند، آنگاه از مطالب فوق می‌دانیم که $r \wedge s = s \wedge r$. علاوه براین

$$(x<5) \wedge (x>3) = (x>3) \wedge (x<5).$$

در حالت کلی، $p \wedge q = q \wedge p$ برای هر دو گزاره‌ی p و q برقرار است.

The other quantifier frequently used in mathematics is the **existential quantifier**, "**there exists**". For example, if we are talking about natural numbers again there exists a natural number less than 4 that divides 12 evenly. That is, there is at least one natural number less than 4 that divides 12 evenly – there may be more. To say there exists is to assert that there is at least one. Symbols which we will use occasionally for the universal quantifier and the existential quantifier are $\forall$ and $\exists$ respectively. For example,

$$\forall x \quad x^2 \ge 0 \text{ mean for all } x, x^2 \ge 0$$

$$\text{and } \exists x \quad x^2 = 0 \text{ means there exists an } x \text{ such that } x^2 = 0.$$

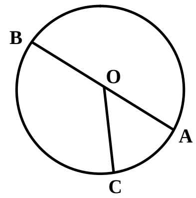
سور دیگری که به طور مکرر در ریاضیات استفاده می‌شود، **سور وجودی** است، «**وجود دارد**». مثلاً اگر درباره اعداد طبیعی صحبت می‌کنیم، مجدداً عدد طبیعی کمتر از ۴ وجود دارد که ۱۲ را به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کند، یعنی اینکه حداقل یک عدد طبیعی کمتر از ۴ وجود دارد که ۱۲ را به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کند ( شاید بیش از یکی پیدا شود). گفتن «وجود دارد» تأکید بر این است که حداقل یکی وجود دارد. نمادهایی که بعضی اوقات برای سور عمومی و سور وجودی به کار خواهیم برد به ترتیب $\forall$ و $\exists$ هستند. مثلاً

$\forall x \quad x^2 \geq 0$ یعنی به ازای هر $x$ ، $x^2 \geq 0$

و $\exists x \quad x^2 = 0$ یک $x$ وجود دارد به طوری که $x^2 = 0$

## Circles

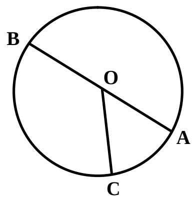
1- Did you ever skip a stone over the surface of the water and watch the circles appear?
Circles occur frequently in nature. Name some of the natural things you have seen that contain circles.
On the next page you will learn how to divide a circle into six equal parts, and later you will learn how to divide a circle into twelve equal parts.




2- In the circle at the right, the center is at O.
3- There are three radius in this circle. Name them.
4- Which is a diameter, AB or OC?
5- If OC is 2", how long is AB?

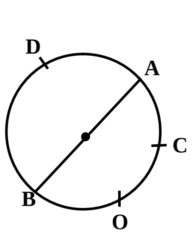
### دایره‌ها

۱ـ آیا تا به حال یک سنگ را روی سطح آب پرتاب کرده‌اید و دایره‌هایی را که ظاهر می‌شوند دیده‌اید؟
دایره‌ها به طور مکرر در طبیعت رخ می‌دهند. برخی از اشیاء طبیعی شامل دایره‌ها را که دیده‌اید نام ببرید.
در صفحه بعدی شما یاد خواهید گرفت چگونه یک دایره را به شش قسمت مساوی تقسیم کنید، و بعد یاد خواهید گرفت چگونه دایره را به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم کنید.




۲ـ در دایره سمت راست ، مرکز در نقطه O است.
۳ـ در این دایره سه شعاع وجود دارد ـ آن‌ها را نام ببرید.
۴ـ قطر کدام است؟ AB یا OC؟
۵ـ اگر OC برابر۲ باشد، طول AB چقدر است؟

**6-** Place a point on a piece of paper and call it O. Whit O as center and a radius of 1 inch draw a circle. With the same center and a radius of 2 inches, draw another circle. These two circles are concentric circles; they have the same center.
7- Any part of the curved of a circle, such as AC, CB, or ACB, in the circle at the right, is an **arc**. The length of the circle is its **circumference**. If AB is a **diameter**, which of the following arcs is a semicircle (half a circle)? CAD ACB، DBC.

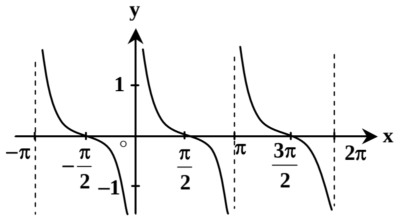



۶ـ نقطه‌ای روی یک تکه کاغذ قرار دهید و آن را O بنامید. به وسیله O به عنوان مرکز و شعاع ۱ اینچ یک دایره رسم کنید. با همان مرکز و شعاع ۲ اینچ دایره دیگری رسم کنید. این دو دایره، دایره‌های هم‌مرکز هستند؛ آن‌ها مرکز یکسانی دارند.
۷ـ هر قسمت از منحنی یک دایره، مثل AC، CB یا ACB در دایره سمت راست یک **قوس یا کمان** نام دارد. طول دایره **محیط** آن است. اگر AB یک **قطر** باشد، کدام یک از کمان‌های زیر یک نیم‌دایره (نصف یک دایره) است؟ CAD، ACB، DBC.

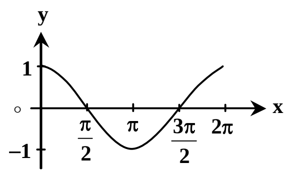
## Trigonometric Functions

From the definitions of the trigonometric functions one easily **deduce** the following formulas:

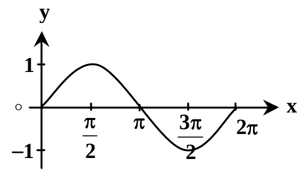
1) $\cot t = \dfrac{1}{\tan t}$ (if $\tan t \neq 0$), 2) $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ (if $\cos t \neq 0$), 3) $\csc t = \dfrac{1}{\sin t}$ (if $\sin t \neq 0$),



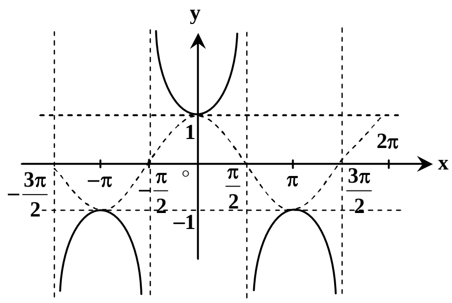

**y = cot x تابع**



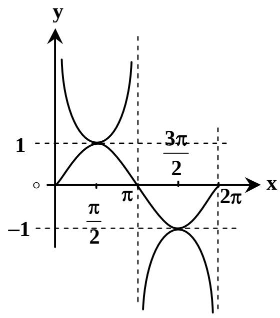

**y = cos x تابع**



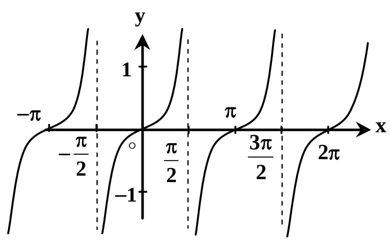

**y = sinx تابع**




**y = sec x تابع**




**y = csc x تابع**




**تابع y = tan x**

Because of these relations, cot is often referred to as the **reciprocal** function of tan. (Do not use the word "**inverse**" to describe the relationship between tan and cot.) Similarly sec and csc are reciprocal functions of cos and sin, respectively. These reciprocal relationships allow us to concentrate our attention on sin, cos, and tan.

There are other relationships between the trigonometric functions which are obtainable directly from the definition. Two important relationships of this type are:

4) $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ $(\text{if} \cos t \neq 0)$, 5) $\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ $(\text{if} \sin t \neq 0)$,

## توابع مثلثاتی

از تعریف توابع مثلثاتی می‌توان به سادگی فرمول‌های زیر را **به دست آورد**:

1) $\cot t = \dfrac{1}{\tan t}$ (اگر $\tan t \neq 0$) 2) $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ (اگر $\cos t \neq 0$) 3) $\csc t = \dfrac{1}{\sin t}$ (اگر $\sin t \neq 0$)

به خاطر این روابط، cot را اغلب به عنوان «**تابع متقابل**» tan می‌شناسند. (واژه «**معکوس**» را برای توضیح رابطه بین tan و cot به‌کار نبرید.) به طور مشابه secو csc به ترتیب توابع متقابل cos و sin هستند. این رابطه‌های متقابل، اجازه می‌دهد توجه خودمان را روی sinو cos و tan متمرکز کنیم.

روابط دیگری بین توابع مثلثاتی برقرار است که مستقیماً از تعریف قابل حصول هستند.

دو رابطه مهم از این نوع چنین است:

4) $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ (اگر $\cos t \neq 0$) 5) $\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ (اگر $\cos t \neq 0$)

Also we saw that $P(t) = P(t + 2n\pi)$ for all real numbers t and all integers n. Hence

6) $\sin t = \sin(t + 2n\pi)$, 7) $\cos t = \cos(t + 2n\pi)$, 8) $\tan t = \tan(t + 2n\pi)$

for all real numbers t and all integers n.

As we **consider** the values of the trigonometric functions, it is important to **realize** that certain trigonometric functions are positive in some quadrants and negative in others. If P(t) is in the second quadrant, then its **x-coordinate** will be negative and **the y-coordinate** will be positive. Hence sin t and its reciprocal csc t will be positive there and others will be negative. (Check this for yourself.)

همچنین ملاحظه کردیم $P(t)=P(t+2n\pi)$ به ازای هر عدد حقیقی t و هر عدد طبیعی n برقرار است. از اینرو برای هر عدد حقیقی t و تمامی اعداد طبیعی n:

6) $\sin t=\sin(t+2n\pi)$ 7) $\cos t=\cos(t+2n\pi)$ 8) $\tan t=\tan(t+2n\pi)$

همانطور که مقادیر توابع مثلثاتی را **بررسی می‌کنیم**، پی بردن به این‌که توابع مثلثاتی در کدام ربع، مثبت و در کدام ربع منفی است، مهم است. اگر $P(t)$ در ربع دوم باشد، آنگاه **مؤلفه x** آن منفی و **مؤلفه y** آن مثبت است. بنابراین $\sin t$ و متقابل آن $\csc t$ در آنجا مثبت هستند و بقیه در آنجا منفی هستند. (خودتان این را بررسی کنید)

Here is a **mnemonic device** which is helpful remembering which trigonometric functions are positive in which quadrants.

| II Students | All I |
|---|---|
| III Take | Calculus IV |

Reading this in the order of the numbering of the quadrants, one gets "All students take calculus". The first letter of the word in each quadrant indicates which is positive; A indicates that all functions are positive in the **first quadrant**; S indicates that sin and its reciprocal are positive in the second quadrant; T indicates that tan and its reciprocal are positive in the third; and C indicates that cos is positive in the fourth quadrant. Certainly such a device will not replace understanding, but it may be helpful when rapid computation is needed.

در اینجا یک **وسیله یادآوری** می‌آوریم که در یادآوری این که کدام تابع مثلثاتی در کدام ربع، مثبت یا منفی است، مفید است.

| II Students | All I |
|---|---|
| III Take | Calculus IV |

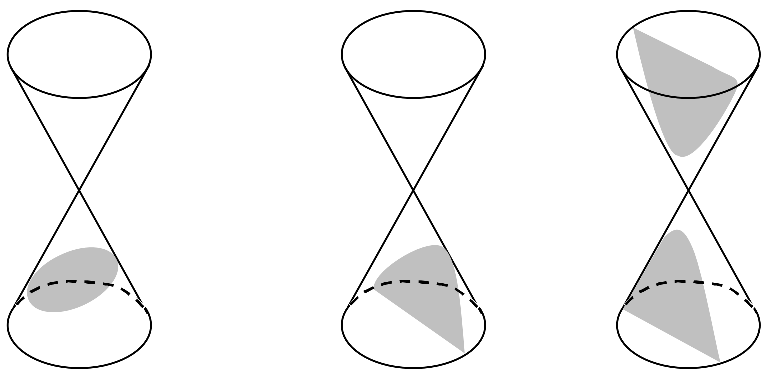
با خواندن این ربع‌ها به ترتیب شماره‌گذاری شده، عبارت «همه دانشجویان درس حسابان را اخذ می‌کنند» به دست می‌آید. اولین حرف از هر کلمه در هر ربع، نشان‌دهنده‌ی این است که کدام تابع در آن ربع، مثبت است: A (حرف اول ALL) نشان می‌دهد همه توابع در **ربع اول** مثبت هستند؛ S نشان می‌دهد sin و متقابل آن در ربع دوم مثبت هستند؛ T نشان می‌دهد tan و متقابل آن در ربع سوم مثبت هستند؛ و C نشان می‌دهد cos در ربع چهارم مثبت است. قطعاً چنین ابزاری نمی‌تواند جایگزین فهمیدن شود، ولی هنگامی که محاسبات سریع مورد نیاز است، می‌تواند مفید باشد.

## Ellipses, Hyperbolas and Parabolas

Ellipses, hyperbolas and parabolas were called **conic sections** by the ancient Greeks. If a right circular is intersected with a plane, as in Figure, the resulting curves are conic sections. We do not plan to prove the results here, but it can be shown that using a **coordinate system**, the conic sections can all be described as graphs of equations of the form

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \quad (*)$$

Where A, B, C, D, E, and F are real numbers and A, B, and C are not all zero. The converse is also true. That is, if an equation is of the from of (*), then the graph of that equation is a conic section



**Ellipse** **Parabola** **Hyperbola**

## بیضی‌ها، هذلولی‌ها و سهمی‌ها

بیضی‌ها، هذلولی‌ها و سهمی‌ها توسط یونانیان باستان **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شدند. اگر یک دایره کامل توسط یک صفحه قطع شود، منحنی‌های به دست آمده، مانند شکل، مقاطع مخروطی هستند. ما قصد نداریم، نتایج را در اینجا اثبات کنیم، ولی با استفاده از یک **دستگاه مختصاتی،** می‌توان نشان داد، تمام مقاطع مخروطی را می‌توان به‌عنوان نمودارهایی از معادلات به شکل زیر توصیف کرد:

$$Ax^۲ + Bxy + Cy^۲ + Dx + Ey + F = ۰ \qquad (*)$$

که در آن A، B، C، D، E و F اعداد حقیقی هستند و A، B، C همگی صفر نیستند. عکس این مطلب نیز درست است. یعنی، اگر معادله‌ای به فرم (*) باشد، آنگاه نمودار آن یک مقطع مخروطی است.

## Polar Coordinates and Cartesian Coordinates

A **geometric figure**, such as a curve in the plane, is a collection of points satisfying one or more special conditions. By translating these conditions into expressions involving the coordinates x and y, we obtain one or more equations which characterize the figure in question.

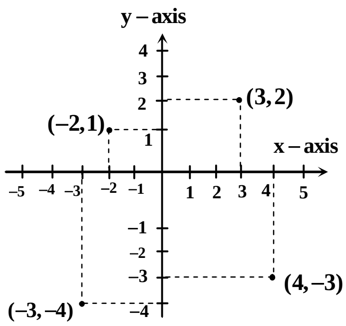
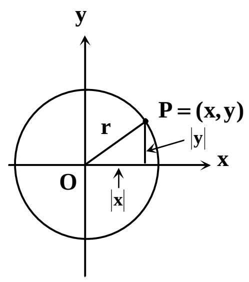



FIGURE1.1

مختصات دکارتی




دایره‌ای که با معادله دکارتی $x^2 + y^2 = r^2$ نمایش داده می‌شود.

## مختصات قطبی و مختصات دکارتی

یک **شکل هندسی،** نظیر یک منحنی در صفحه، دسته‌ای است از نقاط که در یک یا چند شرط ویژه صدق می‌کنند. با ترجمه این شرایط به عباراتی شامل مختصات x و y، یک یا چند معادله به دست می‌آوریم که شکل واقع درمعادله را مشخص می‌کنند.

For example, consider a circle of radius r with its center at the origin. As shown in above Figure. Let P be an arbitrary point on this circle, and suppose p has coordinate (x, y). Then the line segment OP is the hypotenuse of a right triangle whose legs have lengths $|x|$ and $|y|$ and hence, by the theorem of Pythagoras:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

به عنوان مثال دایره‌ای به شعاع r و به مرکز مبدأ را به صورتی که در شکل بالا آورده شده، در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم P نقطه دلخواهی بر این دایره بوده و مختصاتش (x , y) باشد. در این صورت پاره خط OP وتر مثلث قائم‌الزوایه‌ای است که اضلاع قائمش به طول‌های $|x|$ و $|y|$ هستند و در نتیجه بنابر قضیه فیثاغورث:

$$x^۲ + y^۲ = r^۲$$

This equation, called a Cartesian equation of the circle, is satisfied by all points (x, y) on the circle and by no others, so the equation completely characterizes the circle. This example illustrates how **analytic geometry** is used to reduce geometrical statements about points to analytical statements about real numbers.

در این معادله، که معادلهٔ دکارتی دایره نام دارد، کلیهٔ نقاط (x, y) واقع بر دایره صدق می‌کنند و نه هیچ نقطه‌ی دیگری، پس این معادله کاملاً دایره را مشخص می‌نماید. این مثال نشان می‌دهد که چگونه از **هندسهٔ تحلیلی** در تحویل عبارت‌های هندسی مربوط به نقاط به عبارت‌های تحلیلی در باب اعداد حقیقی استفاده می‌شود.

Throughout their historical development, **calculus** and analytic geometry have been intimately intertwined. New discoveries in one subject led to improvements in the other.

The development, in that the two subjects are treated together. However, our primary purpose is to discuss calculus. Concepts from analytic geometry that are required for this purpose will be discussed as needed.

در طول تکامل تاریخی، **حساب دیفرانسیل و انتگرال** و هندسهٔ تحلیلی، بسیار به هم آمیخته شده‌اند. کشفیات جدید در یک موضوع به پیشرفت‌هایی در دیگری انجامید.

پیشرفت، در آن دو موضوع، روی هم مؤثر بوده است.

به هر حال هدف اولیه‌ی ما بحث درباره حساب دیفرانسیل و انتگرال است. مفاهیمی از هندسه تحلیلی که برای این هدف مورد نیاز هستند ، هر جا نیاز باشد بحث خواهند شد.

Actually, only a few very elementary concepts of plane analytic geometry are required to understand the rudiments of calculus. A deeper study of analytic geometry is needed to extend the scope and applications of calculus, and this study will be carried out in later chapters using vector methods as well as the methods of calculus. Until then, all that is required from analytic geometry is a little familiarity with drawing graphs of functions.

در واقع برای درک مقدمات حساب دیفرانسیل و انتگرال فقط چند مفهوم بسیار مقدماتی از هندسهٔ تحلیلی صفحه، مورد نیاز است. برای وسعت بخشیدن به گستره و کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، مطالعهٔ عمیق‌تری از هندسهٔ تحلیلی لازم است، و این مطالعه در فصول بعدی، با استفاده از روش‌های برداری و نیز روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، صورت خواهد گرفت. تا آن موقع تنها چیزی که از هندسهٔ تحلیلی لازم است آشنایی مختصری با ترسیم نمودارهای توابع است.

**Formal definition of Functions as a set of ordered pairs**

In the informal discussion of the foregoing, a function was described as a correspondence which associates to each object in a set X one object in a set Y.

The words **"correspondence" and "associates"** with may not convey exactly the same meaning to all people, so we shall reformulate the whole idea in a different way, basing on the set concept. First we require the notion of an ordered pair of objects.

**تعریف صوری توابع به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب**

در بحث غیر رسمی بخش پیش، یک تابع به عنوان تناظری توصیف شد که به هر شی از مجموعهٔ X یک شی از مجموعهٔ Y را مربوط می‌کند.

از آنجا که کلمات «**تناظر**» و «**مربوط کردن**» ممکن است برای همه افراد دقیقاً یک معنی را ندهند، لذا ما کل ایده را به روشی دیگر، بر اساس مفهوم مجموعه، دوباره فرمول‌بندی می‌کنیم. ابتدا به مفهوم زوج مرتب از اشیا نیاز داریم.

In the definition of set equality, no mentions are made of the order in which elements appear. Thus, the sets {2 ,5} and {5 ,2} are equal because they consist of exactly the same elements. Sometimes the order is important. For example, in plane analytic geometry the coordinates (x, y) of a point represent an ordered pair of numbers. The point with coordinates (2 ,5) is not the same as the point with coordinates (5 ,2), although the sets {2 ,5} and {5,2} are equal.

در تعریف تساوی مجموعه‌ها از ترتیب ظاهر شدن عناصر ذکری به میان نیامده است. بنابراین مجموعه‌های {۵ ، ۲} و {۲ ، ۵} مساوی هستند چون آن‌ها شامل عنصرهای دقیقاً یکسانی هستند. گاهی اوقات ترتیب مهم است. مثلاً، در هندسه تحلیلی صفحه، مختصات (x, y) یک نقطه‌ی نمایشگر زوج مرتبی از اعداد می‌باشند. نقطه‌ای با مختصات (۵ ,۲) با نقطه‌ای به مختصات ( ۲, ۵) یکی نیست حال آن‌که مجموعه‌های{۵ ، ۲} و {۲ ، ۵} برابرند.

In the same way, if we have a pair of objects a and b (not necessarily distinct) and if we wish to distinguish one of the objects, say a, as the first member and the other, b, as the second, we enclose the objects in parentheses, (a, b). we refer to this as an ordered pair. We say that two ordered pairs (a, b) and (c, d) are equal if and only if their first members are equal and their second members are equal. That is to say, we have

$$(a, b)=(c, d) \text{ if and only if } a = c \text{ and } b=d.$$

به همین صورت، اگر یک زوج از اشیا a و b (که لزوماً متمایز نیستند) داشته باشیم و بخواهیم یکی از آنها، مثلاً a، را به عنوان عضو اول و دیگری b را به عنوان عضو دوم مشخص کنیم، آن‌گاه این اشیا را به‌صورت (a, b) در پرانتز می‌گذاریم. ما این را یک زوج مرتب می‌نامیم. دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) مساوی‌اند اگر و فقط اگر عضوهای اول آنها با هم و عضوهای دومشان نیز با هم مساوی باشند؛ یعنی داشته باشیم:

(a, b)=(c, d) اگر و فقط اگر b=d و a=c .

Now we may state the **formal definition** of function.
Definition Of Function. A function f is a set of ordered pairs (x, y) no two of which have the same first member.
If f is a function, the set of all elements x that occur as first members of pairs (x, y) in f is called the domain of f. The set of second members y is called the range of f, or the set of values of f.

حال می‌توانیم **تعریف صوری** تابع را بیان کنیم.

**تعریف تابع.** تابع f مجموعه‌ای است از زوج‌های مرتب (x, y) که هیچ دوتای آنها مؤلفه‌های اول مساوی نداشته باشند.

چنانچه f یک تابع باشد مجموعهٔ همهٔ اعضای x که به عنوان مؤلفه‌های اول زوج‌های (x, y) در f ظاهر می‌شوند دامنه‌ی f نام دارد. مجموعهٔ مولفه‌های دوم y را برد f، یا مجموعهٔ مقادیر f، می‌خوانند.

**Intuitively**, a function can be thought of as a table consisting of two columns. Each entry in the table is an ordered pair (x, y); the column of x's is the domain of f, and the column of y's, the range. If two entries (x, y) and (x, z) appear in the table with the same x-value, then for the table to be a function it is necessary that y = z. In other words, a function cannot take two different values at a given point x. Therefore, for every x in the domain of f there is exactly one y such that $(x, y) \in f$. Since this y is uniquely determined once x is known, we can introduce a special symbol for it. It is customary to write.

$$y = f(x)$$

**از نظر شهودی**، یک تابع را می‌توان به صورت جدولی مرکب از دو ستون انگاشت. هر درایه در این جدول یک زوج مرتب (x, y) خواهد بود؛ ستون xها دامنه‌ی f است و ستون yها برد آن. هرگاه دو درایهٔ (x, y) و (x, z) با یک مقدار x در جدول ظاهر شوند آنگاه برای آنکه جدول یک تابع باشد لازم است که y=z. به عبارت دیگر، یک تابع نمی‌تواند در نقطهٔ مفروض x دو مقدار متفاوت داشته باشد. لذا به ازای هر x در دامنه‌ی f دقیقاً یک y وجود دارد که $(x,y) \in f$. چون این y به محض مشخص شدن x بطور منحصر به فرد معین می‌شود می‌توانیم برای آن علامت خاصی معرفی کنیم. برای نشان دادن اینکه زوج (x, y) در مجموعهٔ f است مرسوم است که به جای $(x,y) \in f$ می‌نویسند:

$$y = f(x)$$

As an alternative to describing a function f by specifying explicitly the pairs it contains, it is usually preferable to describe the domain of f, and then, for each x in the domain, to describe how the function value f(x) is obtained.

به عنوان راه دیگر توصیف تابع f با تعیین صریح زوج‌هایی که تابع حاوی آنهاست، معمولاً ترجیح می‌دهند دامنه‌ی f را توصیف کرده و سپس، به ازای هر x در این دامنه، توضیح دهند که مقدار تابع f(x) چگونه به دست آمده است.

THEOREM Two function *f* and *g* are equal if and only if
(a) *f* and g have the same domain and (b) f(x) = g(x) for every x in the domain of *f*.

**قضیهٔ.** دو تابع f و g مساوی‌اند اگر و فقط اگر

(الف) f و g دارای دامنه‌ی یکسانی باشند، و (ب) به ازای هر x در دامنه‌ی f، f(x)= g(x).

It is important to realize that the objects x and f(x) which appear in the ordered pairs (x, f(x)) of a function need not be numbers but may be arbitrary object of any kind. Occasionally we shall use this degree of generality, but for the most parts we shall be interested in real functions, that is, functions whose domain and range are subsets of the real line.

درک این مطلب مهم است که اشیا x و f(x) که در زوج‌های مرتب (x, f(x)) یک تابع ظاهر می‌شوند لزوماً عدد نبوده بلکه ممکن است اشیایی دلخواه از هر نوع باشند. گاهی از این عمومیت استفاده خواهیم برد، ولی در اکثر قسمت‌ها، به توابع حقیقی، یعنی توابعی که دامنه و برد آنها زیرمجموعه‌هایی از خط حقیقی می‌باشند، توجه خواهیم داشت.

**Islamic mathematics : forgotten brilliance**

Al-Karaji (born 953) is seen by many as the first person to completely free algebra from geometrical operations and to replace them with the arithmetical type of operations which are at the core of algebra today. He was first to define the monomials $x$, $x^2$, $x^3$, ... and $1/x$, $1/x^2$, $1/x^3$, ... and to give rules for products of any two of these. He started a school of algebra which flourished for several hundreds of years. Al-Samawal, nearly 200 years later, was an important member of al-Karaji's school. Al-Samawal (born 1130) was the first to give the new topic of algebra a precise description when he wrote that it was concerned:-

*... with operating on unknowns using all the arithmetical tools, in the same way as the arithmetician operates on the known.*

**ریاضیات اسلامی: عظمت فراموش شده**

الکرجی (متولد ۹۵۳ ) به عقیده بسیاری، اولین کسی است که جبر را کاملاً از اعمال هندسی آزاد کرد و آن را با اعمال حسابی جایگزین کرد که هسته جبر امروز است. او ابتدا می‌بایست تک‌جمله‌ای‌های $x, x^{۲}, \ldots$ و $\frac{۱}{x}, \frac{۱}{x^{۲}}, \frac{۱}{x^{۳}}$ و ... را تعریف می‌کرد و بایستی قوانینی برای ضرب هر دو عبارت از این‌ها ارائه می‌کرد. او یک مدرسه‌ی جبر تاسیس کرد که صدها سال رونق داشت .السماوال حدوداً ۲۰۰ سال بعد، یکی از اعضای مهم مدرسه الکرجی بود. السماوال (متولد ۱۱۳۰) اولین کسی بود که برای مبحث جدید جبر یک توصیف دقیق ارائه کرد وقتی که او نوشت:

«... با عمل کردن روی مجهولات با استفاده از تمامی ابزارهای حسابی ، به همان روشی که یک جبردان روی معلومات عمل می‌کند»

Omar Khayyam (born 1048) gave a complete classification of cubic equations with geometric solutions found by means of intersecting conic sections. Khayyam also wrote that he hoped to give a full description of the algebraic solutions of cubic equations in a later work.

*If the opportunity arises and I can succeed, I shall give all these fourteen forms with all their branches and cases, and how to distinguish whatever is possible or impossible so that a paper, containing elements which are greatly useful in this art will be prepared.*

عمر خیام (متولد ۱۰۴۸) با استفاده از جواب‌های هندسی که به‌وسیله‌ی تقاطع مقاطع مخروطی به‌دست آورده بود، دسته‌بندی کاملی از معادلات درجه‌ی ۳ ارائه داد. او همچنین نوشت امیدوار است توضیح کاملی از جواب‌های جبری معادلات درجه ۳ در کار بعدی ارائه دهد:

«اگر بخت یار باشد و من موفق شوم، تمام این ۱۴ نوع را با تمام شاخه‌ها و حالت‌هایشان و چگونگی تمایز بین آن‌هایی که حل‌پذیر هستند با آن‌هایی که حل‌پذیر نیستند ارائه خواهم کرد. بنابراین مقاله‌ای شامل عناصری که در این هنر بسیار مفید هستند آماده خواهد شد.»

Sharaf al-Din al-Tusi (born 1135), although was almost the same age as al-Samawal, did not follow the general development that came through al-Karaji's school of algebra but rather followed Khayyam's application of algebra to geometry. He wrote a treatise on cubic equations, which :-

*... represents an essential contribution to another algebra which aimed to study curves by means of equations, thus inaugurating the beginning of algebraic geometry.*

شرف‌الدین توسی(متولد ۱۱۳۵) اگر چه تقریباً هم عصر السماوال بود، از توسعه عمومی ناشی از مدرسه جبر الکرجی تبعیت نکرد ولی نسبتاً کاربرد جبر در هندسه خیام را دنبال کرد. او مقاله‌ای در باب معادلات درجه ۳ نوشت که:

« یک سهم اساسی درنوع دیگری از جبر، با هدف مطالعه منحنی‌ها به‌وسیله معادلات ارائه می‌دهد. بدین ترتیب هندسه جبری آغاز می‌شود.

Let us give other examples of the development of Islamic mathematics. Returning to the House of Wisdom in Baghdad in the $9^{th}$ century, one mathematician who was educated there by the Banu Musa brothers was Thabit ibn Qurra (born 836). He made many contributions to mathematics, but let us for the moment consider his contributions to **number theory**. He discovered a beautiful theorem which allowed pairs of **amicable numbers** to be found, that is two numbers such that each is the sum of the **proper divisors** of the other. Al-Baghdadi (born 980) looked at a slight variant of Thabit ibn Qurra's theorem, while al-Haytham (born 965) seems to have been the first to attempt to classify all even **perfect numbers** (numbers equal to the sum of their proper divisors) as those of the form $2^{k-1}(2^k - 1)$ where $2^k - 1$ is prime.

اجازه دهید مثال‌های دیگری از توسعه ریاضیات اسلامی ارائه دهیم. با مراجعه به دارالعلم در قرن ۹ در بغداد، یکی از ریاضیدانانی که توسط برادران بنوموسی تعلیم داده شد، ثابت ابن قراء (متولد ۸۳۶) بود. او سهم زیادی در ریاضیات داشت، ولی اجازه دهید برای یک لحظه مشارکت او در **تئوری اعداد** را بررسی کنیم. او قضیه زیبایی کشف کرد که طبق آن جفت‌هایی از **اعداد متحابه** یافت می‌شوند که به این معنی است که این جفت اعداد به گونه‌ای هستند که هر یک مجموع **مقسوم علیه‌های صحیح** دیگری است. البغدادی (متولد ۹۸۰) تغییر کوچکی در قضیه ثابت ابن قراء ایجاد کرد، در حالی‌که به نظر می‌رسد الهیثم (متولد ۹۵۶) اولین کسی است که تلاش کرد تمام **اعداد کامل** زوج را دسته‌بندی کند (اعدادی که مساوی با مجموع مقسوم علیه‌های صحیحشان هستند) مثل آنهایی که به شکل $۲^{k-۱}(۲^k - ۱)$ هستندکه در آن $۲^k - ۱$ عددی اول است.

Al-Haytham, is also the first person that we know to state **Wilson's theorem**, namely that if $p$ is prime then $1+(p-1)!$ is divisible by $p$. It is unclear whether he knew how to prove this result. It is called Wilson's theorem because of a comment made by Waring in 1770 that John Wilson had noticed the result. There is no evidence that John Wilson knew how to prove it and most certainly Waring did not. Lagrange gave the first proof in 1771 and it should be noticed that it is more than 750 years after al-Haytham before number theory surpasses this achievement of Islamic mathematics.

همچنین الهیثم اولین کسی است که قضیه‌ای را که ما آن را به نام **قضیه ویلسون** می‌شناسیم، مطرح کرد که بیان می‌دارد اگر p اول باشد آن‌گاه $(p-1)! + 1$ بر p بخش‌پذیر است. معلوم نیست که آیا او راه اثبات این نتیجه را می‌دانسته یا نه. این قضیه، به‌خاطر اظهار نظر وارینگ در ۱۷۷۰ که جان ویلسون نتیجه را دریافته بود، قضیه ویلسون نامیده می‌شود. شاهدی وجود ندارد که جان ویلسون از اثبات آن آگاه بوده است و قطعاً وارینگ هم اثبات آنرا نمی‌دانست. لاگرانژ اولین اثبات را در سال ۱۷۷۱ ارائه کرد و باید خاطر نشان کرد که این اثبات بیش از ۷۵۰ سال بعد از الهیثم و قبل از آنکه تئوری اعداد این دستاورد ریاضیات اسلامی را افزایش دهد، انجام شده است.

Continuing the story of amicable numbers, from which we have taken a diversion, it is worth nothing that they play a large role in Islamic mathematics. Al-Farisi (born 1260) gave a new proof of Thabit ibn Qurra's theorem, introducing important new ideas concerning **factorization** and **combinatorial methods**. He also gave the pair of amicable numbers 17296, 18416 which have been attributed to Euler, but we know that these were known earlier than al-Farisi, perhaps even by Thabit ibn Qurra himself. Although outside our time range for Islamic mathematics in this article, it is worth nothing that in the $17^{th}$ century the Islamic mathematician Mohammed Baqir Yazdi gave the pair of amicable number 9,363,584 and 9,437,056 still many years before Euler's contribution.

در ادامه‌ی داستان اعداد متحابه از آنجایی که ما دچار یک انحراف شدیم آن خیلی اهمیت ندارد که نقش مهمی در ریاضیات اسلامی ایفا می‌کنند. الفریسی (متولد ۱۲۶۰) با معرفی ایده‌های جدید مهم شامل **فاکتورگیری** و **روش‌های ترکیباتی** اثبات جدیدی از قضیه ثابت ابن قراء ارائه کرد ، او همچنین جفت اعداد متحابه ۱۸۴۱۶ و ۱۷۲۹۶ ارائه کرد که به اویلر نسبت داده می‌شود، اما می‌دانیم که اینها قبل از الفریسی، شاید حتی توسط خود ثابت ابن قراء شناخته شده بودند.گرچه خارج از محدوده زمانی ریاضیات اسلامی مورد بحث در این مقاله است و ارزش ناچیزی دارد، در قرن ۱۷ ریاضیدان اسلامی محمد باقر یزدی یک جفت عدد متحابه ۹۳۶۳۵۸۴ و ۹۴۳۷۰۵۶ سال‌های سال قبل از کارهای اویلر ارایه داد.

Let us turn to the **different systems of counting** which were used around the $10^{th}$ century in Islamic countries. There were three different types of arithmetic used around this period and, by the end of the $10^{th}$ century, authors such as al-Baghdadi were writing texts comparing the three systems.

اجازه دهید به **سیستم‌های متفاوت شمارشی** که در حدود قرن دهم در کشورهای اسلامی استفاده می‌شد برگردیم. سه نوع حساب متفاوت وجود داشت که در این دوره استفاده می‌شد و در انتهای قرن ۱۰ نویسندگانی مانند البغدادی متن‌ها را با مقایسه این سه سیستم می‌نوشتند.

### Finger-reckoning arithmetic

This system derived from counting on the fingers with the numerals written entirely in words; this **finger-reckoning arithmetic** was the system used by the business community. Mathematicians such as Abu'l-Wafa (born 940) wrote several treatises using this system. Abu'l-Wafa himself was an expert in the use of Indian numerals but these:-

*... did not find application in business circles and among the population of the Eastern Caliphate for a long time.*

Hence he wrote his text using finger-reckoning arithmetic since this was the system used by the business community.

### حساب انگشت شماری

این سیستم از شمردن انگشتان دست توسط اعدادی که تماماً به‌صورت کلمه نوشته می‌شد، مشتق شده بود. این **حساب انگشتی** سیستمی بود که توسط بازرگانان استفاده می‌شد. ریاضیدانانی مانند ابوالوفا (متولد ۹۴۰) چندین مقاله با استفاده از این سیستم نوشتند. ابوالوفا خودش در به کار بردن اعداد هندی خبره بود. اما با این وجود :

«در میان تاجران و مردمان خلافت شرق به مدت طولانی کاربردی نداشت» از این‌رو او متن خودش را با استفاده از حساب انگشت شماری نوشت چرا که سیستمی بود که توسط بازرگانان استفاده می‌شد.

### Sexagesimal system

The second of the three systems was the sexagesimal system, with numerals denoted by letters of the Islamic alphabet. It came originally from the Babylonians and was most frequently used by the Islamic mathematicians in astronomical work.

### سیستم شصتگانی

دومین سیستم از سه سیستم یاد شده سیستم شصتگانی بود، با اعدادی که به‌صورت حروف الفبای عربی نمایش داده می‌شد که اصالتاً از بابلیان گرفته شده بود و مکرر توسط ریاضیدانان اسلامی در کار نجوم استفاده می‌شد.