بسم الله الرحمن الرحیم

به‌نام یکتا مهندس هستی...

مقدمه و راهنمای مطالعهٔ این کتاب:

ده سال پیش در یکی از دانشگاه‌های آمریکا، آزمایشی بسیار جالب و تاریخی انجام شد. در این آزمایش یک آکواریوم بسیار بزرگ ساختند و با قراردادن یک دیوار شیشه‌ای در وسط آکواریوم، آن را به دو بخش تقسیم کردند. در یک بخش از آن یک ماهی گوشتخوار بزرگ و در بخش دیگر آن ماهی‌های کوچکی را قرار دادند که غذای ماهی گوشتخوار محسوب می‌شوند. ماهی گوشتخوار بزرگ بارها و بارها به‌سوی ماهی‌های کوچک حمله می‌کرد ولی هر بار با دیوار شیشه‌ای نامرئی برخورد می‌کرد و به غذای مورد علاقه‌اش نمی‌رسید و ... .

پس از چند روز تلاش، ماهی شکارچی دیگر به سمت ماهی‌های کوچک حمله نمی‌کرد و باور کرده بود که رفتن به آن سوی آکواریوم، محال و غیرممکن است.

اما در پایان آزمایش، روانشناسان دیوار شیشه‌ای نامرئی را برداشتند و نکته جالب این بود که ماهی بزرگ، دیگر به سمت ماهی‌های کوچک حمله نکرد و ... . آیا می‌دانید چرا؟

بله اگرچه دیوار شیشه‌ای دیگر وجود نداشت، اما ماهی بزرگ در ذهنش دیواری ساخته بود که از دیوار واقعی سخت‌تر و بلندتر بود؛ دیوار بلند باور، باوری از جنس محدودیت، باوری از جنس ناتوانی. اگر ما در میان اعتقادات و باورهای خودمان جستجو کنیم، بی‌تردید دیوارهای شیشه‌ای بلند و سختی را خواهیم یافت که نتیجه مشاهدات و تجربیات ماست و بسیاری از آنها وجود خارجی ندارد. نمونه‌ای بارز از این موضوع، باور اکثر دانشجویان به سخت بودن درس ریاضی (۲) در کنکور کارشناسی ارشد است. ما در این کتاب، تصمیم گرفته‌ایم که به شما عزیزان ثابت کنیم که این درس اولاً بسیار قابل فهم و منظم است و ثانیاً پتانسیل بسیار بالایی برای کسب درصدهای خوب و تغییر در سرنوشت آزمون کارشناسی ارشد شما را دارد. به همین منظور با دیدگاهی جدید به این درس پرداخته و بهترین، مطمئن‌ترین و جذاب‌ترین منبع را برای شما عزیزان تولید کرده‌ایم. با اطمینان به شما قول می‌دهیم که با مطالعه کتاب ریاضی (۲)، اولاً از یادگیری آن لذت می‌برید و ثانیاً با کمترین زمان، بهترین نتیجه ممکن را در آن کسب می‌کنید.

نگاه منفی بسیاری از دانشجویان به ریاضی (۲)، به‌دلیل برخورد با مسائل سه بعدی در این درس می‌باشد. در این کتاب که در حدود یک سال نگارش آن زمان برده است، با عشق و علاقه کلیه مراجع و منابع جدید این درس را که در بهترین دانشگاه‌های دنیا تدریس می‌شوند، در کنار تجربیات خود قرار دادیم و تلاش کردیم تا نشان دهیم که مفاهیم ریاضی (۲) در صورت بیان درست، بسیار قابل درک و جذاب می‌باشند. برای استفاده هر چه بهتر از این کتاب، به موارد بیان شده توجه کنید:

۱ در اولین قدم برای بهتر شدن روند یادگیری شما عزیزان، هر فصل را به چند قسمت کوچکتر تقسیم کرده‌ایم تا هم تفکیک مطالب در ذهن شما بهتر انجام شود و هم از مطالعه یک فصل طولانی خسته نشوید. همچنین به‌عنوان یک پیشنهاد در هر بار مطالعه، یک قسمت از هر فصل را به‌خوبی بخوانید.

۲ برای چیدمان تمرین‌ها ساعت‌ها فکر کرده‌ایم و تمرین‌ها را با یک روند آموزشی بسیار منظـم آورده‌ایم. همچنین در لابه‌لای تمرین‌ها مطالبی از قبیل کمی خلاقیت، کمی دقت و ... گنجانده‌ایم تا شما را به ریاضی علاقه‌مندتر کنیم.

۳ در دومیـن قـدم، پـس از مطالعه دقیق درسـنامه‌های هر فصل، بخشـی تحت عنوان افزایـش مهارت و تسـلط بیشـتر را در کتاب قـرار دادیم که با مطالعه دقیـق آن، به جرأت می‌توان گفت هیچ تست استانداردی باقی نمی‌ماند که ایده اصلی آن برای شما آشنا نباشد.

۴ در قـدم بعـد بخش جذاب توصیه‌نامـه را در کتاب قرار داده‌ایم تا بعد از مطالعه کامل هر فصل، یک‌بار دیگر نکات مهم و کاربردی آن را با هم مرور کنیم.

۵ اگـر مـوارد فـوق را به‌خوبـی انجـام دهیـد، قادر خواهیـد بود کـه خودآزمایی‌های هر فصل را خودتان حل کنید. پاسـخ تشـریحی این خودآزمایی‌ها را می‌توانید در سـایت www.serieomomi.ir مشاهده نمایید.

۶ هدفمان این اسـت که با ارائه برنامه هفتگی مطالعه کتاب، پرسـش و پاسخ و همچنین گرفتـن آزمون ماهانه در سـایت www.serieomomi.ir به نوعـی بزرگترین کلاس درس ریاضی را تشکیل داده و تا رسیدن به سطح عالی با شما همراه باشیم.

۷ تجربه نشان داده است، کسانی‌که ریاضی را با این شیوه نوین یاد می‌گیرند، قادر خواهند بود آن را با کیفیت خوبی تدریس کنند. از اینرو صمیمانه از شما تقاضا داریم بعد از مطالعه این کتاب، مباحث جدیدی که یاد گرفته‌اید را به دوستان خود نیز بیاموزید تا این مفاهیم در سراسر این مرز و بوم، حتی دورترین و محروم‌ترین نقاط کشور نیز انتشار یابد.

در ایـن قسـمت ابتـدا از خانواده‌هـای صبورمـان کـه در تمامـی مراحل تهیـه این کتاب پـا به پای ما، فشـار این کار را تحمل کردند، نهایت تشـکر و قدردانـی را داریم. در ادامه از دوسـت ارجمنـد، دکتر محمـد آهنگر که در لحظه لحظـه تألیف این کتـاب ما را یاری کـرده و از نظرات ارزشمندشـان بهـره بردیم، تشـکر می‌کنیم. لازم اسـت از جناب آقای دکتر شـریفیان مدیریت محترم انتشـارات، که تمام امکانات لازم جهت هر چه با کیفیت‌تر شدن این پروژه را در اختیار ما گذاشته‌اند و همچنین از ویراستار علمی این اثر، جناب آقای دکتر مجید فرقانی که اینک در خارج از مرزهای کشور عزیزمان ایران به سر برده و مشغول افتخارآفرینی هستند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشیم.

علیرغـم تلاش‌های فراوانی که برای بازبینی این کتاب شـده اسـت، وجود اشـکال در آن غیرممکـن نبوده و از اسـاتید گرانقدر و دانشـجویان عزیز تقاضا می‌شـود، پیشـنهادات و انتقادات خود را از طریق سایت www.serieomomi.ir مطرح نمایند.

محمد صادق معتقدی - مسعود مهدیان - عباس تاجیک

فهرست

سری عمومی ارشد

فصل مقدماتی:

ماتریس، بردار، خط و صفحه

مروری بر آنچه خواهیم خواند:

در ایــن فصــل مقدماتی و پیش‌نیاز، ابتــدا به بیان مفاهیم مطرح شــده در ماتریس، ضرب ماتریس‌هــا، ماتریس معکوس، مقادیر ویژه یک ماتریس و ... می‌پردازیم و با حل مســائل متنوع، توانایی شــما عزیزان را در حل سؤالات مختلف افزایش می‌دهیم. در ادامه با ضرب بردارها و نحوهٔ نوشتن معادلات خط و صفحه در فضا آشنا می‌شویم و نکات موجود در آنها را به‌طور کامل مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

برای درک بهتر، مطالب فصل مقدماتی مطابق نمودار درختی زیر ارائه می‌شود:

ماتریس، بردار، خط و صفحه ←

- A - ماتریس و مفاهیم کاربردی آن
- B - ضرب بردارها، خط و صفحه

A-۱- مفاهیم مقدماتی

مفهوم ماتریس اولین بار در سال ۱۸۵۰، توسط جیمز جوزف سیلوستر در ریاضیات وارد شد. ماتریس در واقع آرایش اعداد حقیقی به فرم زیر است:

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{ccccc} \text{ستون اول ماتریس}\downarrow & & \text{ستون سوم ماتریس}\downarrow & & \text{ستون } n \text{ اُم ماتریس}\downarrow \end{array}\\
\begin{array}{r} \text{سطر اول ماتریس}\longrightarrow \\ \text{سطر دوم ماتریس}\longrightarrow \\ A= \\ \\ \text{سطر } m \text{ اُم ماتریس}\longrightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}
\end{array}$$

تذکر۱: ماتریس A از m سطر و n ستون تشکیل شده است که به آن ماتریس $m\times n$ (بخوانید ماتریس m در n) می‌گویند.

تذکر۲: در ماتریس فوق a_{23}، در واقع عنصری (درایه‌ای) از ماتریس است که بر روی سطر دوم و ستون سوم، قرار دارد. به همین صورت، سایر عناصر ماتریس نیز خوانده می‌شوند.

آشنایی با ماتریس‌های مربعی

ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad E=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1 & 0\\ 5 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

اگر توجه کرده باشید، در تمامی ماتریس‌های فوق تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس با هم برابر بوده و این دسته ماتریس‌ها را ماتریس مربعی می‌نامند.

ماتریس مربعی از ماتریس‌های بسیار مهم و پرکاربرد در علوم مهندسی محسوب می‌شود که در مورد آن، باید اصطلاحات زیر را بدانیم:

۱) **قطر اصلی ماتریس:** اعدادی که در ماتریس‌های فوق آنها را آبی نوشته‌ایم، قطر اصلی ماتریس را تشکیل می‌دهند و اگر بخواهیم کمی دقیق‌تر بگوییم در ماتریس $A_{n\times n}$، درایه‌های a_{11} ، a_{22} ، ... و a_{nn}، قطر اصلی ماتریس را تشکیل می‌دهند.

زیر شاخه‌های قسمت اول

۲ **تریس*** **(اثر یا رد) ماتریس:** مجموع درایه‌های روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی را تریس ماتریس می‌نامند. به‌طور مثال در ماتریس‌های A و B داریم:

$$Tr(A)=۳+(-۲)+(-۴)=-۳\ ,\ Tr(B)=۱+۱=۲$$

۳ همانطور که مشاهده می‌کنید در ماتریس A، همه درایه‌های ماتریس بجز عناصر روی قطر اصلی آن صفر است. به چنین ماتریس‌هایی، ماتریس قطری می‌گویند.

۴ در ماتریس‌های B و C همه درایه‌های قطر اصلی برابر با یک بوده و سایر درایه‌ها صفر می‌باشند. به این دسته از ماتریس‌ها، ماتریس واحد (همانی یا یکه) می‌گویند و آنرا با I نمایش می‌دهند.

۵ ماتریس B که یک ماتریس واحد ۲×۲ است را با $I_{۲\times۲}$ یا $I_۲$ و به صورت مشابه ماتریس C را با $I_{۳\times۳}$ یا $I_۳$ و در حالت کلی، یک ماتریس $n\times n$ را با $I_{n\times n}$ یا I_n نمایش می‌دهند.

۶ ماتریس D را در نظر بگیرید. همانطور که مشاهده می‌کنید در این ماتریس تمام عناصر زیر قطر اصلی صفر است. چنین ماتریس‌هایی را ماتریس‌های بالا مثلثی می‌نامند.

۷ ماتریس E را در نظر بگیرید. همانطور که مشاهده می‌کنید در این ماتریس تمام عناصر بالای قطر اصلی صفر است. چنین ماتریس‌هایی را ماتریس‌های پایین مثلثی می‌نامند.

اعمال جبری روی ماتریس‌ها

بعد از آشنایی با مفاهیم اولیهٔ ماتریس، در ادامه می‌خواهیم نحوهٔ انجام عمل جمع، تفریق و ضرب در فضای ماتریسی را به شما عزیزان یاد دهیم.

جمع و تفریق

همانطور که اعداد را با هم جمع و یا از هم کم می‌کردیم، ماتریس‌های مشابه را نیز به سادگی با هم جمع و تفریق می‌کنیم. برای درک این موضوع به دو مثال سادهٔ زیر توجه کنید:

$$① \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۳ & ۳+(-۱) \\ ۵+۲ & ۶+۱ \\ -۱+(-۳) & ۲+۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۷ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$② \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲-۳ & ۳-(-۱) \\ ۵-۲ & ۶-۱ \\ -۱-(-۳) & ۲-۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۳ & ۵ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس در یکدیگر

همانطور که به یاد دارید اعداد را به سادگی در هم ضرب می‌کردیم $(۲\times۲=۴)$. اما ضرب دو ماتریس به سادگی ضرب اعداد نیست. برای یادگیری این موضوع، ضرب دو ماتریس زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید که حاصل آن ماتریسی مانند C شده است:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۳}}_{\text{ماتریس } A}\times\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}_{۳\times۲}}_{\text{ماتریس } B}=C\ \text{ماتریس}$$

---

* Trace

حال فرض کنید که مؤلفه $C_{۱۲}$ (سطر اول و ستون دوم از ماتریس C) را از ما بپرسند. برای محاسبهٔ این مؤلفه، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: سطر اول از ماتریس A و ستون دوم از ماتریس B را انتخاب می‌کنیم.

گام دوم: درایه‌های نظیر به نظیر آنها را در هم ضرب کرده و در نهایت حاصلضرب آنها را با هم جمع می‌کنیم. با این کار، حاصل $C_{۱۲}$ به‌دست می‌آید:

ستون دوم ماتریس B

سطر اول ماتریس A

$$\boxed{C_{۱۲}} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ -۳ \end{bmatrix} = (۳)(۰) + (۱)(-۱) + (-۲)(-۳) = ۵$$

عنصر واقع بر سطر اول و ستون دوم ماتریس $C = A \times B$

از روند ساده فوق که شیوهٔ محاسبهٔ یکی از درایه‌های ماتریس C را به ما یاد می‌داد، می‌خواهیم چند نتیجهٔ کاربردی و مفید را یاد بگیریم:

۱) همانطور که مشاهده کردید در هر یک از سطرهای ماتریس A سه درایه و در هر یک از ستون‌های ماتریس B نیز سه درایه موجود است:

سطرهای A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } B}$$

ستون‌های B

با رخ دادن این اتفاق، حاصلضرب نظیر به نظیر سطر در ستون امکان‌پذیر خواهد بود.

۲) به‌عنوان یک نکتهٔ اساسی به خاطر بسپارید که در حالت کلی اگر بخواهیم برای دو ماتریس A و B حاصلضرب $A \times B$ را تعریف کنیم، باید تعداد ستون‌های ماتریس A (ماتریس اول) با تعداد سطرهای ماتریس B (ماتریس دوم) برابر باشند. برای درک بهتر این دو موضوع به دو مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۳ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times ۳} \times \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ & -۵ \\ ۳ & ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times ۴} \Rightarrow$$ (ضرب امکان‌پذیر است)

$۳ = ۳$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۳} \Rightarrow$$ (ضرب امکان‌پذیر نیست)

$۳ \neq ۲$

تمرین ۱: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ را در نظر بگیرید.

۱) ماتریس‌های AB و BA را بیابید.

۲) $Tr(AB)$ و $Tr(BA)$ را بیابید.

● حل:

۱) شاید فکر کنید که $A\times B$ و $B\times A$ چه تفاوتی با هم دارند! برای پاسخ به این سؤال در ابتدا سعی می‌کنیم که $A\times B$ و $B\times A$ را به صورت جداگانه بدست آوریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۰\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۳ & -۱\\ ۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۲)(۳)+(-۱)(۲) & ۶ & -۳\\ (۳)(۳)+(۰)(۲) & ۹ & -۳\\ (-۲)(۳)+(۱)(۲) & -۶ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۶ & -۳\\ ۹ & ۹ & -۳\\ -۴ & -۶ & ۳\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}۳ & ۳ & -۱\\ ۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۰\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۳)(۲)+(۳)(۳)+(-۱)(-۲) & -۴\\ (۲)(۲)+(۰)(۳)+(۱)(-۲) & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷ & -۴\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$$

۲) به یاد داریم تریس ماتریس، مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس بوده و از قسمت (۱) داریم:

$Tr\times(AB)=۴+۹+۳=۱۶$ ، $Tr\times(BA)=۱۷+(-۱)=۱۶$

● **دقت:** در حالت کلی می‌توان گفت که ماتریس AB و BA لزوماً یکسان نیست و از سوی دیگر می‌توان نشان داد در صورت مربعی بودن AB و BA، تریس آنها با هم برابر است.

به توان رساندن ماتریس

حتماً به یاد دارید که در اعداد حقیقی، اعداد را چگونه به توان می‌رساندیم $(۱۲۵=۵\times۵\times۵=۵^۳)$. مشابه این عمل در ماتریس‌های مربعی نیز به سادگی امکان‌پذیر است. برای این منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$A^۲=A\times A$

$A^۳=A^۲\times A$

$A^۴=A\times A^۳$ یا $A^۴=A^۳\times A$

در ادامه با حل چند تمرین، مفاهیم این قسمت را بیش‌تر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تمرین ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ -۱ & ۲ & -۱\\ -۲ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر واقع بر ستون دوم ماتریس $A^۲$ کدام است؟ (عمران - ۷۴)

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۱۶

● حل: با یک تمرین آموزشی روبرو هستیم. اگر دقت کنید به‌سادگی می‌توان فهمید که برای رسیدن به $A^۲$، کافی است ماتریس A را در خودش ضرب کنیم. از طرفی در ضرب دو ماتریس، سطرهای ماتریس اول و ستون‌های ماتریس دوم انتخاب می‌شوند می‌توان گفت ستون دوم ماتریس $A^۲$، نتیجه ضرب سطرهای ماتریس A در ستون دوم ماتریس A خواهد بود و داریم:

$$A^۲=A\times A=\underbrace{\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ -۱ & ۲ & -۱\\ -۲ & ۰ & ۳\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } A}\times\underbrace{\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ -۱ & ۲ & -۱\\ -۲ & ۰ & ۳\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } A}=\underbrace{\begin{bmatrix}\cdots & ۲+۲+۰ & \cdots\\ \cdots & -۱+۴+۰ & \cdots\\ \cdots & ۳+۰+۰ & \cdots\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } A^۲}$$

در نهایت خواسته مسئله، مجموع عناصر ستون دوم ماتریس $A^۲$ بوده که برابر است با:

مجموع عناصر ستون دوم: $۴+۳+۳=۱۰$ (گزینهٔ ۲)

ترانهاده (ترانسپوز یا برگرداننده) ماتریس

گاهی از اوقات در فرآیندهای جبری بر روی ماتریس‌ها نیاز به ماتریسی داریم که ترانهادهٔ ماتریس اصلی نام دارد. برای محاسبه ترانهاده یک ماتریس، کافیست جای سطرها و ستون‌های ماتریس را عوض کنیم. بـه عنـوان مثـال ترانهادهٔ ماتریس A را به صورت زیر می‌نویسیم:

سطر اول ماتریس

ستون اول ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t \text{ یا } A^T \text{ یا } A'=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

سطر دوم ماتریس

ستون دوم ماتریس

A-۲- دترمینان ماتریس

دترمینان یک ماتریس مربعی **عددی** است وابسته به آن مـاتریس کـه در بـسیاری از محاسـبات ریاضـی کـاربرد مستقیم دارد. از دبیرستان به یاد داریم که برای یک ماتریس ۲×۲، دترمینان به سادگی به صورت زیر بـه دسـت می‌آمد:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\det(A)=|A|=ad-bc}$$

تمرین ۳: اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه حاصل دترمینان A^T-B^T کدام است؟

● حل: برای رسیدن به ترانهاده یک ماتریس، باید سطرها و ستون‌های آن ماتریس را جابجا کنیم، بنابراین داریم:

$$A^T-B^T=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

حال دترمینان ماتریس ۲×۲ طبق رابطه $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ برابر است با:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=(2)(-2)-(-5)(0)=-4$$

تمرین ۴: شرط لازم و کافی برای این که ماتریس مربعی $A_{2\times 2}$ در تساوی $\det(I+A)=1+\det A$ صدق کنـد، ایـن است که: (ریاضی - ۸۴)

۱) $Tr\,A=0$ ۲) $Tr\,A=-1$ ۳) $Tr\,A=1$ ۴) $Tr\,A=\det A$

● حل: یک ماتریس $A_{2\times 2}$ و دترمینان آن را به صورت کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A=ad-bc$$

حال برای رسیدن به $\det(I+A)$ ابتدا $I+A$ را به دست می‌آوریم:

(چون A، ۲×۲ است، ماتریس I را ۲×۲ انتخاب کرده‌ایم)

$$I+A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{bmatrix}$$

و دترمینان آن برابر است با:

$$\det(I+A)=(a+1)(d+1)-bc$$

حال به صورت مسئله برمی‌گردیم، خواسته مسئله به‌صورت زیر است:

$$det\,(I+A)=det\,(I)+det\,(A)\;\Rightarrow\;\overbrace{(a+۱)(d+۱)-bc}^{det\,(I+A)}=۱+\underbrace{ad-bc}_{det\,(A)}$$

$$\Rightarrow\; ad+a+d+۱-bc=۱+ad-bc\;\Rightarrow\; a+d=۰$$

و چون $a+d$ بیانگر جمع عناصر قطر اصلی ماتریس A (تریس ماتریس A) می‌باشد، بنابراین برای برقراری تساوی فوق باید $Tr\,A=۰$ باشد و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

حال سؤال آن است که برای ماتریس‌های مربعی ۳×۳، ۴×۴ و ... دترمینان را چگونه باید بدست آوریم. این موضوع را در ادامه بررسی می‌کنیم. قبل از شروع به بررسی این موضوع، باید شما را با دو تعریف ساده آشنا کنیم.

دترمینان ij اُمین کهاد یک ماتریس (Δ_{ij})

برای محاسبه دترمینان ij اُمین کهاد یک ماتریس مانند A، کافی است که سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس را حذف کرده و از ماتریس حاصل از عناصر باقی‌مانده دترمینان بگیرید، به این دترمینان $\varDelta_{ij}$ می‌گویند. به مثال ساده زیر توجه کنید:

$$A=\begin{bmatrix}۲&۱&-۳\\۴&۵&۳\\۳&۲&-۱\end{bmatrix}\Rightarrow \underbrace{\varDelta_{۲۳}}_{\text{حذف سطر دوم و ستون سوم}}=\begin{vmatrix}۲&۱\\۳&۲\end{vmatrix}=(۲)(۲)-(۱)(۳)=۱$$

ij اُمین همسازه (کوفاکتور) ماتریس A یا N_{ij}

برای تشکیل ij اُمین همسازه ماتریس A (یعنی N_{ij}) در گام اول $\varDelta_{ij}$ (دترمینان حاصل از حذف سطر iاُم و ستون jاُم) را حساب کرده و آنرا در $(-۱)^{i+j}$ ضرب می‌کنیم. به بیان ریاضی $N_{ij}=(-۱)^{i+j}\varDelta_{ij}$ است.

تذکر: در ماتریس A عنصر واقع بر سطر iاُم و ستون jاُم را معمولاً با a_{ij} و همسازه مربوط به این عنصر را با N_{ij} یا A_{ij} نمایش می‌دهند.

در ادامه با حل یک تمرین این بحث را دنبال می‌کنیم.

تمرین ۵: کوفاکتور (*cofactor*) عنصر $a_{۲۳}$ در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\\۷&۸&۹\end{bmatrix}$ کدام است؟ (پلیمر – ۹۲)

۱) -۳۶ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۳۶

حل: برای یافتن کوفاکتور ابتدا دترمینان کهاد را پیدا می‌کنیم:

$$\underbrace{\varDelta_{۲۳}}_{\text{دترمینان حاصل از حذف سطر دوم و ستون سوم}}=\begin{vmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\\۷&۸&۹\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱&۲\\۷&۸\end{vmatrix}=(۱)(۸)-(۲)(۷)=-۶$$

حال با ضرب این عدد در $(-۱)^{۲+۳}$ به کوفاکتور عنصر $a_{۲۳}$ می‌رسیم. بنابراین داریم:

$$N_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\varDelta_{۲۳}=-\varDelta_{۲۳}=-(-۶)=۶$$ (گزینهٔ ۳)

در ادامه نحوهٔ محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس ۳×۳ را به شما عزیزان یاد داده و برای تسلط بیشتر، پس از آن چند تمرین را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دترمینان ماتریس ۳×۳

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

برای محاسبه دترمینان این ماتریس به روش بسط باید گام‌های زیر را طی کنیم:

گام اول: یکی از سطرها و یا یکی از ستون‌ها را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

گام دوم: همسازه مربوط به تک تک عناصر روی سطر یا ستون انتخاب شده را بدست می‌آوریم.

گام سوم: هر یک از عناصر روی سطر یا ستون دلخواه انتخاب شده را در همسازه مربوط به خودش ضرب کرده و حاصلضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم. به عنوان نمونه در ماتریس فوق برای محاسبه دترمینان داریم:

$$|A| \xlongequal{\text{بسط نسبت به سطر اول}} a_{11}N_{11}+a_{12}N_{12}+a_{13}N_{13}$$

$$|A| \xlongequal{\text{بسط نسبت به ستون دوم}} a_{12}N_{12}+a_{22}N_{22}+a_{32}N_{32}$$

تمرین ۶: مقدار دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟ (عمران - آزاد ۷۹)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۰

حل: برای محاسبه دترمینان یک ماتریس ۳×۳ مانند A گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: یک سطر و یا یک ستون دلخواه را انتخاب می‌کنیم (در این تمرین سطر اول انتخاب شده است).

گام دوم: همسازه مربوط به تک تک عناصر روی سطر اول را بدست می‌آوریم:

همسازه عنصر سطر اول و ستون اول: $N_{11}=\underbrace{\boxed{(-1)^{1+1}}}_{=1}\;\overbrace{\boxed{\Delta_{11}}}^{\text{حذف سطر اول و ستون اول}}=\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=۲-۳=-۱ \Rightarrow N_{11}=-۱$

همسازه عنصر سطر اول و ستون دوم: $N_{12}=\underbrace{\boxed{(-1)^{1+2}}}_{=-1}\;\overbrace{\boxed{\Delta_{12}}}^{\text{حذف سطر اول و ستون دوم}}=-\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix}=-(۴-۹)=۵ \Rightarrow N_{12}=۵$

همسازه عنصر سطر اول و ستون سوم: $N_{13}=\underbrace{\boxed{(-1)^{1+3}}}_{=1}\;\overbrace{\boxed{\Delta_{13}}}^{\text{حذف سطر اول و ستون سوم}}=\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}=۲-۳=-۱ \Rightarrow N_{13}=-۱$

گام سوم: تک تک عناصر روی سطر اول را در همسازه مربوط به خودش ضرب کرده و حاصلضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$|A|=\overbrace{\boxed{a_{11}}}^{\text{درایه واقع بر سطر اول و ستون اول}}\underbrace{\boxed{N_{11}}}_{\text{همسازه مربوط به سطر اول و ستون اول}}+a_{12}N_{12}+\overbrace{\boxed{a_{13}}}^{\text{درایه واقع بر سطر اول و ستون سوم}}\underbrace{\boxed{N_{13}}}_{\text{همسازه مربوط به سطر اول و ستون سوم}}=(۱)(-۱)+(۲)(۵)+(۳)(-۱)=۶$$

(گزینهٔ ۱)

کمی ساده‌تر ببینیم

برای محاسبه دترمینان یک ماتریس ۳×۳ به‌صورت زیر، عملاً بسط دادن ما نسبت به سطر اول به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a} & \overset{-}{b} & \overset{+}{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر اول}} +a\underbrace{\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}_{\text{حذف سطر و ستونی که } a \text{ در آن قرار دارد}} - b\underbrace{\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}_{\text{حذف سطر و ستونی که } b \text{ در آن قرار دارد}} + c\underbrace{\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}}_{\text{حذف سطر و ستونی که } c \text{ در آن قرار دارد}}$$

تذکر: در بسط دترمینان حول سطر اول به صورت قراردادی بالای a علامت مثبت قرار داده و یکی در میان به مابقی عناصر، علامت مثبت و منفی اعمال می‌کنیم.

سـؤال: اگر سطر و یا ستون دیگری را برای بسط دادن حول آن انتخاب می‌کردیم، باز هم علامت‌های مثبت و منفی مشخص شده با رنگ آبی به همین صورت خواهد بود؟ (به اولین عنصر سطر یا ستون انتخابی علامت مثبت و یکی در میان مثبت و منفی اعمال می‌کنیم؟)

پاسخ: پاسخ به سؤال فوق بسیار ساده است. برای تعیین علامت همواره اولین درایه سطر یا ستون انتخابی را در نظر بگیرید. سپس به آن درایه علامت $(-1)^{i+j}$ را اعمال کرده و یکی در میان به درایه‌های بعدی مثبت و منفی اعمال کنید. برای درک بهتر به مثال ساده زیر توجه کنید:

$$\begin{vmatrix} a & \overset{-}{b} & c \\ d & \overset{+}{e} & f \\ g & \overset{-}{h} & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به ستون دوم}} -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

از آنجا که اولین عنصر ستون دوم b است و این عنصر در سطر $i=1$ و ستون $j=2$ قرار دارد. از این‌رو علامت $(-1)^{i+j}=(-1)^{3}=-1$ را به b اعمال کرده و به بقیه عناصر ستون دوم، یکی در میان علامت مثبت و منفی اعمال می‌کنیم.

در ادامه برای درک بهتر شما دانشجویان گرامی، چند تمرین دیگر را بیشتر بررسی می‌کنیم.

تمرین ۷: اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس AA^t کدام است؟ (عمران - آزاد ۸۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: ترانهاده یک ماتریس، سطر و ستون ماتریس را جابجا می‌کند و داریم:

$$AA^t=\overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}^{A}\overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}}^{A^t}=\begin{bmatrix} 9+4 & 6-2 & 3-4 \\ 6-2 & 4+1 & 2+2 \\ 3-4 & 2+2 & 1+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overset{+}{13} & \overset{-}{4} & \overset{+}{-1} \\ 4 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

در ادامه برای محاسبه دترمینان این ماتریس ۳×۳، با بسط حول یک سطر و یا یک ستون دلخواه (مثل سطر اول) داریم:

$$|AA^t|=+13\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=13(25-16)-4(20-(-4))+(-1)(16-(-5))=0$$ (گزینهٔ ۱)

سری عمومی ارشد

فصل اول:

توابع برداری

مروری بر آنچه خواهیم خواند:

در این فصل می‌خواهیم شما عزیزان را با توابع برداری و مفاهیم مطرح شده در آن، آشنا کنیم و نحوهٔ محاسبهٔ انحناء و تاب در توابع مختلف را به شما یاد دهیم. در ادامه بردارهای کنج فرنه را معرفی کرده و کاربردهای مختلف آن را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. سؤالات مطرح شده از این فصل در کنکور، بسیار ساده بوده و تنها کافیست درک اولیه از مسئله پیدا کرده و از رابطهٔ مناسب استفاده کنید. برای درک بهتر شما دانشجویان گرامی، مطالب این فصل را در قسمت‌های زیر ارائه می‌کنیم:

توابع برداری:
- A - مفاهیم اولیه توابع برداری
- B - انحناء
- C - بردارهای کنج فرنه

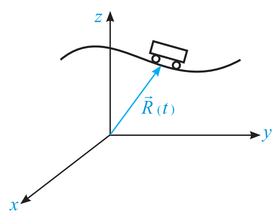
در این قسمت از فصل، می‌خواهیم ارتباط ریاضیات با مفاهیم حرکت‌شناسی در فیزیک را یاد بگیریم. از دوران دبیرستان به‌خاطر دارید که اگر مکان متحرک را بدانیم، با مشتق‌گیری از آن، سرعت متحرک و با مشتق‌گیری از سرعت، شتاب متحرک به‌دست می‌آید. در ادامه با یک مثال ساده، با مفاهیم فوق بیشتر آشنا می‌شویم:

$$x = t^۳ + ۳t \begin{cases} x' = \underbrace{\boxed{V_x}}_{\text{سرعت در راستای محور } x} = \dfrac{dx}{dt} = ۳t^۲ + ۳ \\[2ex] x'' = \underbrace{\boxed{a_x}}_{\text{شتاب در راستای محور } x} = \dfrac{d^۲x}{dt^۲} = ۶t \end{cases}$$

در ادامه این موضوعات را به فضای سه‌بعدی تعمیم می‌دهیم.

A-۱- بردار مکان و مفهوم خم

شکل مقابل را در نظر بگیرید:



در این شکل، اتومبیلی بر روی یک جاده در حال حرکت است و موقعیت آن در هر لحظه مختصات متفاوتی دارد. برداری که در هر لحظه از مبدأ به محل قرارگیری متحرک متصل می‌شود، **بردار مکان متحرک** نام دارد که فرم کلی آن به‌صورت زیر است:

بردار مکان : $\overrightarrow{R(t)} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$

تذکر ۱: مسیر حرکت اتومبیل در رابطهٔ فوق، در واقع نماینده یک خم فضایی است.

تذکر ۲: به بردار $\overrightarrow{R(t)} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$ یک تابع برداری می‌گویند که در آن به‌ازای هر t، موقعیت متحرک در فضا، در زمان t مشخص می‌شود.

محاسبه بردار سرعت از معادلهٔ خم

برای محاسبه سرعت متحرک، مشابه با آنچه از فیزیک یاد گرفتیم، باید از مکان متحرک نسبت به زمان مشتق بگیریم و به عبارتی داریم:

بردار سرعت : $\overrightarrow{R'(t)} = \overrightarrow{V(t)} = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}$

● **دقت:** اندازه بردار سرعت متحرک نماینده تندی حرکت آن است و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

تندی حرکت : $|\overrightarrow{V(t)}| = \sqrt{(x'(t))^۲ + (y'(t))^۲ + (z'(t))^۲}$

زیر شاخه‌های قسمت اول

محاسبه شتاب از معادله خم

برای محاسبه شتاب نیز همانطورکه در مقدمه بیان کردیم، باید دوبار از بردار مکان مشتق بگیریم (یا یک‌بار از بردار سرعت مشتق بگیریم):

$\overrightarrow{R''(t)} = \overrightarrow{a(t)} = x''(t)\,\vec{i} + y''(t)\,\vec{j} + z''(t)\,\vec{k}$: بردار شتاب

تذکر: اندازهٔ بردار شتاب متحرک، معرف تندی سرعت آن است و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$|\overrightarrow{a(t)}| = \sqrt{(x''(t))^{۲} + (y''(t))^{۲} + (z''(t))^{۲}}$: تندی سرعت

در ادامه برای درک بهتر شما عزیزان از این مفاهیم، چند تمرین آموزشی را حل می‌کنیم.

تمرین ۱: معادله حرکت یک متحرک در فضا به‌صورت $\overrightarrow{R(t)} = (۲t+۲)\,\vec{i} + (-۳t^{۲}+۴)\,\vec{j} + (t^{۲}-۲t)\,\vec{k}$ می‌باشد. با توجه به این معادله هر یک از موارد زیر را بیابید:

۱) بردارهای سرعت و شتاب متحرک.

۲) زاویه بین بردارهای سرعت و شتاب متحرک در لحظه $t = ۱$.

۳) لحظه‌ای که بردار سرعت متحرک کمترین مقدار را دارد.

۴) لحظه‌ای که بردارهای سرعت و شتاب متحرک بر هم عمودند.

حل: همانطورکه گفتیم با مشتق‌گیری از بردار مکان متحرک به بردار سرعت و با مشتق‌گیری از بردار سرعت متحرک به بردار شتاب می‌رسیم. پس داریم:

۱) از آنجاکه بردار مکان متحرک به‌صورت $\overrightarrow{R(t)} = (۲t+۲)\,\vec{i} + (-۳t^{۲}+۴)\,\vec{j} + (t^{۲}-۲t)\,\vec{k}$ است، می‌توان نوشت:

$\overrightarrow{R'(t)} = \overrightarrow{V(t)} = ۲\vec{i} - ۶t\,\vec{j} + (۲t-۲)\,\vec{k}$: بردار سرعت

$\overrightarrow{R''(t)} = \overrightarrow{a(t)} = -۶\vec{j} + ۲\vec{k}$: بردار شتاب

۲) ابتدا در $t = ۱$، بردار سرعت و شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$\overrightarrow{R'(۱)} = \overrightarrow{V(۱)} = ۲\vec{i} - ۶\vec{j}$: بردار سرعت در لحظهٔ $t = ۱$

$\overrightarrow{R''(۱)} = \overrightarrow{a(۱)} = -۶\vec{j} + ۲\vec{k}$: بردار شتاب در لحظهٔ $t = ۱$

در ادامه برای یافتن زاویه بین بردار سرعت و بردار شتاب متحرک در لحظه $t = ۱$، از رابطه ضرب داخلی استفاده می‌کنیم:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{V(۱)} \cdot \overrightarrow{a(۱)}}{|\overrightarrow{V(۱)}|\,|\overrightarrow{a(۱)}|} = \frac{(۲)(۰)+(-۶)(-۶)+(۰)(۲)}{\sqrt{۴+۳۶}\sqrt{۳۶+۴}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{۳۶}{۴۰} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{۹}{۱۰}\right)$$

دقت: بر خلاف دیدگاه برخی از دانشجویان، بردارهای سرعت و شتاب همواره بر هم عمود نیستند!

۳) مقدار سرعت (همان اندازه بردار سرعت یا تندی حرکت) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$|\overrightarrow{V(t)}| = \sqrt{(۲)^{۲} + (-۶t)^{۲} + (۲t-۲)^{۲}} = \sqrt{۴۰t^{۲} - ۸t + ۸}$: مقدار سرعت یا تندی حرکت

اگر رابطه به‌دست آمده را همانند یک تابع به‌صورت $f(t) = \sqrt{۴۰t^{۲} - ۸t + ۸}$ در نظر بگیریم، برای می‌نیمم کردن آن می‌توان نوشت:

$$f'(t) = ۰ \Rightarrow \frac{۸۰t - ۸}{۲\sqrt{۴۰t^{۲} - ۸t + ۸}} = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۱۰}$$

۴) همانطورکه یاد گرفتیم، شرط عمود بودن دو بردار اینست که ضرب داخلی آنها برابر با صفر باشد. بنابراین بردارهای سرعت و شتاب در لحظه‌ای بر هم عمودند که حاصل ضرب داخلی آنها برابر با صفر شود:

$$\overrightarrow{V(t)}\cdot\overrightarrow{a(t)}=0 \Rightarrow (2)(0)+(-6t)(-6)+(2t-2)(2)=0 \Rightarrow 40t-4=0 \Rightarrow t=\frac{1}{10}$$

کمی دقت

به جواب‌های موارد (۳) و (۴) توجه کنید. در لحظه‌ای که بردارهای سرعت و شتاب بر هم عمودند، اندازه سرعت (تندی حرکت) کمترین مقدار را دارد. این تعبیر فیزیکی را در ادامه فصل بیشتر بررسی می‌کنیم.

تمرین ۲: بیشترین مقدار سرعت در نقطه P بر روی مسیری با تابع برداری $\overrightarrow{r(t)}=(4\cos^3 t)\vec{i}+(4\sin^3 t)\vec{j}$ کدام است؟ (۹۰ - MBA)

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) ۱۲ ۴) ۶

● حل: برای حل این تمرین، ابتدا با مشتق‌گیری نسبت به زمان از تابع برداری $\overrightarrow{r(t)}$ به تابع سرعت $\overrightarrow{V(t)}$ می‌رسیم و سپس اندازه بردار سرعت را ماکزیمم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{r(t)}=(4\cos^3 t)\vec{i}+(4\sin^3 t)\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{r'(t)}=\overrightarrow{V(t)}=(-12\cos^2 t\sin t)\vec{i}+(12\sin^2 t\cos t)\vec{j}$$

و در ادامه اندازه بردار سرعت برابر است با:

$$\text{مقدار سرعت}: |\overrightarrow{V(t)}|=\sqrt{(-12\cos^2 t\sin t)^2+(12\sin^2 t\cos t)^2}=12|\sin t\cos t|\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}$$

$$=12|\sin t\cos t| \xrightarrow{\sin 2t=2\sin t\cos t} |\overrightarrow{V(t)}|=6|\sin 2t|\le 6 \Rightarrow \max(|\overrightarrow{V(t)}|)=6$$ (گزینهٔ ۴)

● دقت: همانطورکه مشاهده می‌کنید، مفاهیم فیزیکی مطرح شده با مشتق توابع برداری در ریاضیات ارتباط مستقیم دارد. از این‌رو در بعضی از تست‌های کنکور به‌جای مطرح کردن مفاهیم فیزیکی، به‌طور مستقیم از مشتق توابع برداری سؤال پرسیده می‌شود. در ادامه یک نمونه از این تست‌ها را با هم حل می‌کنیم.

تمرین ۳: فرض کنید $f(x,y,z)=\dfrac{z^4}{1+x^2+y^3}$ و $\gamma(t)=(t^2+\sin t\,,te^t+t^3+2t\,,3t^7+5t^4+\sinh t+e^t)$ است. چنانچه $g(t)=f(\overrightarrow{\gamma(t)})$ باشد، مقدار $g'(0)$ کدام است؟ (سیستم - ۹۳)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶

● حل: با توجه به فرم برداری $\overrightarrow{\gamma(t)}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x(t)=t^2+\sin t \\ y(t)=te^t+t^3+2t \\ z(t)=3t^7+5t^4+\sinh t+e^t \end{cases}$$

در ادامه می‌توان تابع f را با جایگزینی مقادیر x، y و z به‌صورت زیر برحسب t بیان نمود:

$$f(x,y,z)=\frac{z^4}{1+x^2+y^3} \Rightarrow g(t)=f(\gamma(t))=\frac{(3t^7+5t^4+\sinh t+e^t)^4}{1+(t^2+\sin t)^2+(te^t+t^3+2t)^3}$$

و برای محاسبهٔ $g'(t)$، ابتدا مشتق صورت و مخرج را به‌طور جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مشتق صورت}: 4(21t^6+20t^3+\cosh t+e^t)(3t^7+5t^4+\sinh t+e^t)^3$$

$$\text{مشتق مخرج}: 2(t^2+\sin t)(2t+\cos t)+3(te^t+t^3+2t)^2(e^t+te^t+3t^2+2)$$

که در $t=\circ$ خواهیم داشت:

$t=\circ$ مقدار صورت در : $(\circ+\circ+\circ+1)^4=1$

$t=\circ$ مقدار مخرج در : $1+(\circ)^2+(\circ)^3=1$

$t=\circ$ مقدار مشتق صورت در : $4(\circ+\circ+1+1)(\circ+\circ+\circ+1)^3=8$

$t=\circ$ مقدار مشتق مخرج در : $2(\circ+\circ)(\circ+1)+3(\circ+\circ+\circ)^2(1+\circ+\circ+2)=\circ$

و در نهایت با استفاده از قاعده مشتق توابع کسری داریم:

$$g'(t)=\frac{(\text{صورت})\,(\text{مشتق مخرج})\;-\;(\text{مخرج})\,(\text{مشتق صورت})}{(\text{مخرج})^2}$$

که در $t=\circ$ به‌دست می‌آوریم:

$$g'(\circ)=\frac{(8)(1)-(\circ)(1)}{(1)^2}=8 \qquad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

کمی فکر: به نظر شما، آیا این موضوع که تلاش نکردیم $g'(t)$ را به‌صورت مستقیم محاسبه کنیم، روند حل را ساده‌تر نکرد؟

A-۲- بررسی سؤالات متنوع‌تر

در قسمت قبل با حل چند تمرین ساده با مفاهیم بردار مکان، سرعت و شتاب آشنا شدیم. در ادامه می‌خواهیم مثال‌های متنوع‌تری از این بحث را بررسی کنیم.

تمرین ۴: نقطه متحرک در هر زمان t مسیر حرکت به معادله $x=e^t\cos t$ و $y=e^t\sin t$ را مشخص می‌کند. زاویه بین بردار شعاع حامل و بردار شتاب کدام است؟ (MBA - ۸۷)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) متغیر است.

حل: همانطورکه مشاهده می‌کنید، بردار مکان متحرک (شعاع حامل) به‌صورت زیر داده شده است:

$$\overrightarrow{R(t)}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}=(e^t\cos t)\vec{i}+(e^t\sin t)\vec{j}$$

در ادامه با دوبار مشتق‌گیری نسبت به t به بردار شتاب به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\overrightarrow{R'(t)}=\overrightarrow{V(t)}=(e^t\cos t-e^t\sin t)\vec{i}+(e^t\sin t+e^t\cos t)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{R''(t)}=\overrightarrow{a(t)}=(\cancel{e^t\cos t}-2e^t\sin t-\cancel{e^t\cos t})\vec{i}+(\cancel{e^t\sin t}+2e^t\cos t-\cancel{e^t\sin t})\vec{j}$$

حال برای یافتن زاویه بین دو بردار $\overrightarrow{R(t)}$ و $\overrightarrow{R''(t)}$، با استفاده از روابط ضرب داخلی دو بردار می‌توان نوشت:

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{R(t)}\cdot\overrightarrow{R''(t)}}{|\overrightarrow{R(t)}||(\overrightarrow{R''(t)})|}$$

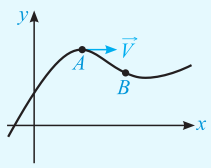
$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{(e^t\cos t)(-2e^t\sin t)+(e^t\sin t)(2e^t\cos t)}{|\overrightarrow{R(t)}||\overrightarrow{R''(t)}|}=\frac{-2e^{2t}\cos t\sin t+2e^t\cos t\sin t}{|\overrightarrow{R(t)}||\overrightarrow{R''(t)}|}=\circ$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\circ \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \qquad \text{(گزینهٔ ۲)}$$

بررسی یک موضوع پرکاربرد در کنکور

در برخی از سؤالات، در یک نقطه از مسیر در مورد جهت حرکت متحرک از ما سؤال پرسیده می‌شود. با توجه به مفاهیم فیزیکی مطرح شده، می‌توان گفت در هر نقطه از مسیر، بردار سرعت بر مسیر حرکت متحرک مماس است.

درک بیشتر: با توجه به شکل، متحرک بر روی یک خم از نقطه A به نقطه B (واقع در صفحه xy) در حال حرکت است. همانطورکه مشاهده می‌کنید، در نقطهٔ A، مماس در راستای محور x ها بوده و این یعنی بردار سرعت (جهت متحرک) نیز در راستای محور x ها است.



نتیجه : $\vec{V}_y = 0$

در ادامه این بحث را با چند تمرین بیشتر بررسی می‌کنیم.

تمرین ۵: هرگاه γ یک منحنی با معادله $\vec{\gamma} : \vec{r}(x) = (x, e^{-x^2})$ باشد، آنگاه بردار مماس یکه در نقطه $(0, 1)$ کدام‌یک از بردارهای زیر است؟ (نساجی - ۸۶)

۱) $\frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ ۳) $\vec{i}$ ۴) $\vec{j}$

● حل: اگر منحنی را به‌صورت برداری $\vec{r}(t) = t\vec{i} + e^{-t^2}\vec{j}$ فرض کنیم، آنگاه بردار سرعت، بردار مماس بر منحنی خواهد بود. بنابراین بردار مماس بر منحنی در لحظه $t = 0$ برابر است با:

$$\vec{r'}(t) = \vec{i} - 2te^{-t^2}\vec{j} \xrightarrow{t=0 \text{ در}} \vec{r'}(0) = \vec{i}$$

(که البته برداری یکه نیز می‌باشد) بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تمرین ۶: فرض کنید C منحنی نظیر به تابع برداری $\vec{r}(t) = (e^t + \cos t)\vec{i} - (e^t + \sin t)\vec{j}$ باشد، در چه نقاطی از این منحنی خط مماس بر C عمود بر بردار $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ است؟ (نساجی - ۸۸)

۱) نقاط نظیر $(k \in \mathbb{Z})\ t = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۲) نقاط نظیر $(k \in \mathbb{Z})\ t = k\pi - \frac{\pi}{4}$

۳) نقاط نظیر $(k \in \mathbb{Z})\ t = k\pi - \frac{\pi}{6}$ ۴) نقاط نظیر $(k \in \mathbb{Z})\ t = k\pi + \frac{\pi}{4}$

● حل: می‌خواهیم بردار هادی خط مماس، بر بردار $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ عمود باشد. از این‌رو با توجه به شرط عمود بودن دو بردار، به‌سادگی می‌توان فهمید که باید ضرب داخلی بردار هادی خط و بردار $\vec{a}$ برابر با صفر باشد. با توجه به اینکه بردار هادی هر خط با آن موازی است، بردار هادی خط مماس بر منحنی (تابع برداری) نیز می‌تواند بیانگر همان بردار سرعت باشد. بنابراین بردار هادی خط به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

بردار هادی خط مماس بر خم : $\vec{V}(t) = \underbrace{\boxed{\vec{r'}(t)}}_{\text{سرعت}} = (e^t - \sin t)\vec{i} - (e^t + \cos t)\vec{j}$

و در ادامه داریم:

$$\vec{a} \perp \vec{V} \Rightarrow \vec{a}.\vec{V} = 0 \xrightarrow{\vec{a} = (1,1)} (1)(e^t - \sin t) + (1)(-e^t - \cos t) = 0 \Rightarrow -\sin t - \cos t = 0$$

$$\Rightarrow \sin t = -\cos t \Rightarrow \tan t = -1 \Rightarrow t = k\pi - \frac{\pi}{4}$$ (گزینهٔ ۲)

تمرین ۷: منحنی پارامتری C به معادلات $z=2t$ ، $y=\sin t$ و $x=\cos t$ و نقطه A نظیر $t=\frac{\pi}{2}$ بر منحنی C مفروض است.

۱) خط مماس بر منحنی فوق در نقطه A، در چه نقطه‌ای صفحه xoz را قطع می‌کند؟

۲) خط مماس بر منحنی فوق در نقطه A، صفحه $2x+4y+z=4$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

حل: می‌دانیم بردار مماس بر منحنی (تابع برداری) $\overrightarrow{R(t)}$ از مشتق آن، یعنی $\overrightarrow{R'(t)}$ محاسبه می‌شود. بنابراین $\overrightarrow{R'(t)}$ می‌تواند بیانگر بردار هادی خط مماس بر منحنی باشد. پس می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{R(t)}=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+2t\,\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{R'(t)}=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+2\vec{k}$$

حال در لحظه $t=\frac{\pi}{2}$ (نقطه A) بردار هادی خط مماس بر منحنی را به‌دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{R'(\tfrac{\pi}{2})}=\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{k}$$

و البته در لحظه $t_0=\frac{\pi}{2}$ مقادیر x، y و z (مختصات نقطه A) برابرند با:

$$A(\cos t_0,\sin t_0,2t_0) \xrightarrow{\text{در } t_0=\frac{\pi}{2}} A(0,1,\pi)$$

بنابراین با داشتن بردار هادی و یک نقطه از خط موردنظر، معادلهٔ آن برابر است با:

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\pi}{2} \xrightarrow{\text{فرم پارامتری خط}} \begin{cases} x=-t \\ y=1 \\ z=2t+\pi \end{cases}$$

۱) از آنجاکه در تمام نقاط صفحهٔ xoz مقدار $y=0$ است، در لحظه تلاقی خط با صفحه xoz باید مقدار y را صفر کرد (که این اتفاق نمی‌افتد) و چون $y=1$ است، بنابراین خط فوق صفحه xoz را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

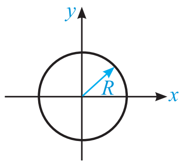
۲) در لحظه تلاقی خط با صفحه $2x+4y+z=4$ باید فرم پارامتری خط را در معادله صفحه قرار داد. بنابراین داریم:

$$2(-t)+4(1)+(2t+\pi)=4 \Rightarrow 4+\pi=4 \Rightarrow \text{معادله فاقد جواب است}$$

بنابراین خط مماس بر منحنی در نقطه A، صفحه $2x+4y+z=4$ را نیز قطع نمی‌کند.

B-۱- مفهوم اولیه انحناء

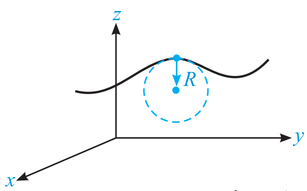
دایره مقابل را در نظر بگیرید:



همانطورکه مشاهده می‌کنید در این دایره، شعاع در هر نقطه برابر با R بوده و در ریاضیات می‌گوییم شعاع انحناء دایره برابر با R است. از سوی دیگر با کمک معکوس آن (یعنی $\frac{۱}{R}$) پارامتری به نام انحناء (κ)معرفی می‌شود.

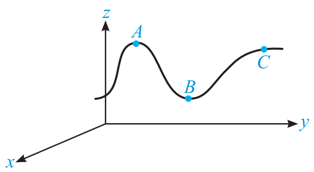
بخوانید کاپا

در این قسمت تلاش می‌کنیم شعاع دایره‌ای به شکل زیر که در هر نقطه، از خم بر آن مماس است را به‌دست آوریم:



در ادامه با حل چند تمرین این مفاهیم را بهتر یاد می‌گیریم.

تمرین ۸: شکل زیر بیانگر یک خم در صفحه xy است. انحناء در کدام‌یک از نقاط آن بیشتر است؟



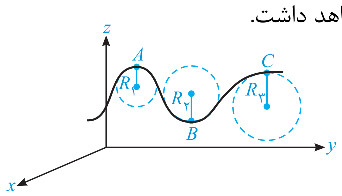
۱) در نقطه A

۲) در نقطه B

۳) در نقطه C

۴) شعاع انحناء در این خم ثابت است.

حل: ابتدا در هر یک از نقاط A، B و C یک دایره مماس کرده و عکس شعاع آن دایره را به‌عنوان انحناء معرفی می‌کنیم. به‌سادگی می‌توان فهمید، دایره‌ای که شعاع کوچکتری دارد، انحنای بزرگتری خواهد داشت.



بنابراین با توجه به شکل، از آنجاکه $R_۱$ از $R_۲$ و $R_۳$ کوچکتر است، پس $\frac{۱}{R_۱}$ از $\frac{۱}{R_۲}$ و $\frac{۱}{R_۳}$ بزرگتر خواهد بود و به‌عبارتی انحناء در نقطه A بزرگتر از انحناء در نقاط B و C است و درنتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

زیر شاخه‌های قسمت دوم

استراتژی محاسبه انحناء در حالت کلی

برای محاسبه انحناء در یک خم فضایی با فرم کلی $\overrightarrow{R(t)}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ به ازای $t=t_\circ$ گـام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: بردارهای سرعت و شتاب را (توسط مشتق‌گیری از $\overrightarrow{R(t)}$) در لحظهٔ $t=t_\circ$ به‌دست می‌آوریم.

گام دوم: بردارهای سرعت و شتاب را در هم ضرب خارجی می‌کنیم (یعنی $\vec{V}\times\vec{a}$ را می‌یابیم).

گام سوم: پس از محاسبه $|\vec{V}|$ و $|\vec{V}\times\vec{a}|$، انحناء را از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\kappa(t)=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^۳}$$

در ادامه با حل چند تمرین این موضوع را بهتر یاد می‌گیریم.

تمرین ۹: اندازهٔ انحناء مارپیچ $z=\frac{۱}{۳}t^۳$، $y=\frac{۱}{۲}t^۲$ و $x=t$ در نقطه $A(۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ کدام است؟ (ریاضی - ۸۷)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۹}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

حل: ابتدا با توجه به‌صورت سؤال، بردار مکان متحرک را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\overrightarrow{R(t)}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}=t\vec{i}+\frac{۱}{۲}t^۲\vec{j}+\frac{۱}{۳}t^۳\vec{k}$$

همچنین توجه کنید که نقطهٔ $A(۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ متناظر با نقطه $t=۱$ است. در ادامـه بـرای محاسـبهٔ انـدازهٔ انحنـاء گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: بردارهای سرعت و شتاب را (با مشتق‌گیری از $\overrightarrow{R(t)}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\text{سرعت}:\ \overrightarrow{V(t)}=\overrightarrow{R'(t)}=\vec{i}+t\vec{j}+t^۲\vec{k}\\ \text{شتاب}:\ \overrightarrow{a(t)}=\overrightarrow{R''(t)}=\vec{j}+۲t\vec{k}\end{cases}\xrightarrow{\text{در } t=۱ \text{ (نظیر نقطه } A)}\begin{cases}\vec{V}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{a}=\vec{j}+۲\vec{k}\end{cases}$$

گام دوم: بردارهای سرعت و شتاب را در هم ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۱&۱\\ ۰&۱&۲\end{vmatrix}=\vec{i}-۲\vec{j}+\vec{k}$$

گام سوم: در نهایت مقدار انحناء را از رابطه $\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^۳}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}|\vec{V}|=\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۳}\\ |\vec{V}\times\vec{a}|=\sqrt{(۱)^۲+(-۲)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۶}\end{cases}\Rightarrow\kappa=\frac{\sqrt{۶}}{(\sqrt{۳})^۳}=\frac{\sqrt{۶}}{۳\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$ (گزینهٔ ۲)

توصیه‌نامه

توابع برداری

در این قسمت از فصل می‌خواهیم نکات کلیدی را یک‌بار دیگر با هم مرور کنیم. در ابتدا نحوهٔ به‌دست آوردن بردارهای سرعت و شتاب را با داشتن بردار مکان برای شما عزیزان یادآوری می‌کنیم:

الف) بردارهای مکان، سرعت و شتاب:

معادله حرکت یک متحرک در فضا در هر لحظه t به‌صورت $\overrightarrow{R(t)}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ قابل نمایش است و ما به آن بردار مکان متحرک می‌گوییم. با مشتق‌گیری متوالی نسبت به t از بردار مکان بـه بردارهـای سرعت و شتاب متحرک می‌رسیم:

بردار سرعت متحرک : $\overrightarrow{V(t)}=\overrightarrow{R'(t)}=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$

بردار شتاب متحرک : $\overrightarrow{a(t)}=\overrightarrow{R''(t)}=x''(t)\vec{i}+y''(t)\vec{j}+z''(t)\vec{k}$

(تمرین‌های ۱ تا ۴)

نکته‌ای در مورد بردار سرعت متحرک: بردار سرعت بر مسیر حرکت متحرک مماس است. (تمرین‌های ۵، ۶ و ۷)

ب) انحناء:

در هر نقطه از خم می‌توان یک دایره را بر آن مماس کرد. معکوس شعاع دایره را انحناء می‌نامند. (تمرین ۸)

استراتژی یافتن انحناء در حالت کلی:

یک خم فضایی به‌صورت $\overrightarrow{R(t)}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ را در نقطهٔ $t=t_0$ در نظر بگیریـد. بـرای یـافتن انحناء گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: بردارهای سرعت و شتاب را در لحظهٔ $t=t_0$ به‌دست می‌آوریم.

گام دوم: بردارهای سرعت و شتاب را در هم ضرب خارجی می‌کنیم.

گام سوم: انحناء را از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\kappa(t)=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$$

(تمرین‌های ۹ و ۱۰)

نکته: معکوس انحناء در هر نقطه بیانگر شعاع انحناء می‌باشد. (تمرین ۱۱)

۱ تکنیک پارامتری کردن معادلات دایره، بیضی و هذلولی:

با توجه به دو اتحاد $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ و $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ می‌تـوانیم فـرم پـارامتری معادلـهٔ اشـکال هندسی زیر را به‌دست آوریم:

معادله دایره : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \Rightarrow$ فرم پارامتری دایره : $\begin{cases} x=x_0+R\cos t \\ y=y_0+R\sin t \end{cases}$

معادله بیضی : $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ فرم پارامتری بیضی : $\begin{cases} x=x_0+a\cos t \\ y=y_0+b\sin t \end{cases}$

معادله هذلولی : $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ فرم پارامتری هذلولی : $\begin{cases} x=x_0+a\cosh t \\ y=y_0+a\sinh t \end{cases}$

(تمرین‌های ۱۲ تا ۱۵)

۲ **انحناء در توابع با فرم $y=f(x)$:**

در اینگونه توابع، انحناء را می‌توان از رابطهٔ $\kappa(x)=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ به‌دست آورد. (تمرین‌های ۱۶ تا ۲۱)

۳ **انحناء در روابط قطبی $r=f(\theta)$:**

در روابط قطبی انحناء از رابطهٔ $\kappa(\theta)=\dfrac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$ به‌دست می‌آید. (تمرین‌های ۴۶ و ۴۷)

ج) محاسبه تاب در فضا:

خم $\overrightarrow{R(t)}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت تاب از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\tau=\frac{\vec{V}.(\vec{a}\times\vec{a}')}{|\vec{V}\times\vec{a}|^2}$$

(تمرین‌های ۲۲ و ۲۳)

تذکر۱: عکس تاب را شعاع تاب می‌نامند.

تذکر۲: اگر خم در یک صفحه جای گیرد، تاب صفر است و اصطلاحاً خم مسطح است. (تمرین‌های ۲۴ و ۲۵)

د) بردارهای کنج فرنه:

سه بردار کنج فرنه $(\vec{B},\vec{N},\vec{T})$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

۱ **بردار $\vec{T}$:** بردار $\vec{T}$ را بردار یکه مماسی می‌گویند و به‌صورت $\vec{T}=\dfrac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$ به‌دست می‌آید.

۲ **بردار $\vec{B}$:** بردار $\vec{B}$ را بردار قائم یکه نوع دوم می‌گویند که به‌صورت $\vec{B}=\dfrac{\vec{V}\times\vec{a}}{|\vec{V}\times\vec{a}|}$ به‌دست می‌آید.

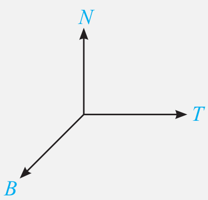
۳ **بردار $\vec{N}$:** بردار $\vec{N}$ را بردار قائم یکه نوع اول می‌نامند که به‌صورت $\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}$ به‌دست می‌آید.
(تمرین‌های ۲۶، ۲۷ و ۲۸)

د) مسائل ترکیبی خط و صفحه با مفاهیم بردارهای کنج فرنه:

در اینگونه مسائل توجه به نکات زیر، کلید اصلی حل سؤالات کنکور است:

۱ بردار $\vec{V}$ و در نتیجه بردار $\vec{T}$ بر خم مماس است. (تمرین‌های ۲۹ و ۳۰)

۲ سه بردار $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ دو به دو بر هم عمودند. (تمرین ۳۱)



۳
بردار $\vec{T}$ بردار نرمال صفحه قائم است.
بردار $\vec{N}$ بردار نرمال صفحه اصلاحی است.
بردار $\vec{B}$ بردار نرمال صفحه بوسان است.

هـ) مؤلفه‌های مماس و قائم بردار شتاب:

هر بردار شتاب را می‌توان با توجه به دو بردار یکه $\vec{T}$ و $\vec{N}$ به‌صورت $\vec{a}=a_T\vec{T}+a_N\vec{N}$ بیان کرد که در آن a_T مؤلفهٔ مماسی بردار شتاب و a_N مؤلفه قائم بردار شتاب است.

استراتژی یافتن a_T و a_N:

مؤلفه مماسی بردار شتاب را از رابطه $a_T=\frac{d}{dt}(|\vec{V}|)$ و مؤلفه قائم بردار شتاب را از رابطه $a_N=\sqrt{|\vec{a}|^2-a_T^2}$ به‌دست می‌آوریم. (تمرین‌های ۳۲ و ۳۳)

سوالات خودآزمایی فصل اول

۱- اگر $F(t)=\frac{۲t}{۱+t^۲}i+\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}j+k$ یک تابع برداری باشد، آنگاه زاویه بین $F(t)$ و $F'(t)$ کدام است؟ (هسته‌ای - ۸۳)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲- نقطه متحرک در هر زمان t مسیر حرکت به معادله $x=e^t\cos t$ و $y=e^t\sin t$ را مشخص می‌کند. زاویه بین بردار شعاع حامل و بردار شتاب کدام است؟ (MBA - ۸۷)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) متغیر است.

۳- زاویه بین بردار مماس بر منحنی $f(t)=at\vec{i}+bt^۲\vec{j}+t^۳\vec{k}$ که در آن $۲b^۲=۳a$ با بردار $\vec{u}=\vec{i}+\vec{k}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π (ژئوفیزیک - ۸۹)

۴- زاویه بردار یکه مماس T بر منحنی $R(t)=(۳\cos t, ۳\sin t, ۴t)$ با محور z کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی - ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\arccos\frac{۳}{۴}$ ۴) $\arccos\frac{۴}{۵}$

۵- فرض کنید C منحنی نظیر به تابع برداری $r(t)=(e^t+\cos t)\vec{i}-(e^t+\sin t)\vec{j}$ باشد، در چه نقاطی از این منحنی خط مماس بر C عمود بر بردار $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ است؟ (نساجی - ۸۸)

۱) نقاط نظیر $t=k\pi+\frac{\pi}{۶}$ و $k\in\mathbb{Z}$
۲) نقاط نظیر $t=k\pi-\frac{\pi}{۴}$ و $k\in\mathbb{Z}$
۳) نقاط نظیر $t=k\pi-\frac{\pi}{۶}$ و $k\in\mathbb{Z}$
۴) نقاط نظیر $t=k\pi+\frac{\pi}{۴}$ و $k\in\mathbb{Z}$

۶- خط مماس بر منحنی به معادله $x=t+۲$ و $y=t^۲-t$ و $z=t^۳+t$ در نقطه نظیر $t=۱$ صفحه xoy را با کدام مختصات قطع می‌کند؟ (صنایع غذایی - ۸۹)

۱) $(\frac{۵}{۲},۱,۰)$ ۲) $(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲},۰)$ ۳) $(\frac{۵}{۲},-\frac{۱}{۲},۰)$ ۴) $(۲,-\frac{۱}{۲},۰)$

۷- معادله صفحه عمود بر منحنی $z=\cos ۲t$ و $y=\sin t$ و $x=\sin t$ در $P(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰)$ کدام است؟ (سیستم - ۸۵)

۱) $\sqrt{۲}x+\sqrt{۲}y-۴z=۲$
۲) $\sqrt{۲}x-\sqrt{۲}y+۴z=۲$
۳) $-\sqrt{۲}x-\sqrt{۲}y+۴z=۲$
۴) $-\sqrt{۲}x+\sqrt{۲}y-۴z=۲$

۸- اگر $\vec{R(t)}$ یک تابع برداری مشتق‌پذیر باشد به قسمی‌که $|\vec{R(t)}|=k$ (k ثابت) آنگاه: (علوم کامپیوتر - ۸۶)

۱) بردار سرعت عمود بر $R(t)$
۲) بردار شتاب عمود بر $R(t)$
۳) بردار سرعت ثابت
۴) بردار شتاب ثابت

۹- انحنای منحنی $r(t)=t\vec{i}+\cosh t\vec{j}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - ۹۱)

۱) $\cos^۳ t$ ۲) $\cosh^۳ t$ ۳) $\frac{۱}{\cosh^۲ t}$ ۴) $\frac{۱}{\cosh^۳ t}$

۱۰- انحنای خم $R(t) = (t + \cos t, t - \cos t, \sqrt{۲} \sin t)$ در یک نقطه به پارامتر t کدام است؟ (عمران نقشه‌برداری - ۸۹)

۱) $\kappa = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\kappa = \frac{\sqrt{۲}}{۴}t$ ۳) $\kappa = \frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۴) $\kappa = \frac{\sqrt{۲}}{۸}t$

۱۱- مقدار انحنا در هر نقطه مارپیچ $\vec{r}(t) = (a\cos \omega t)\vec{i} + (a\sin \omega t)\vec{j} + (b\,\omega t)\vec{k}$ که در آن a و ω و b اعدادی ثابت و مثبت هستند، برابر است با: (معدن - ۸۵)

۱) $\kappa = \frac{a^۲ + b^۲}{b}$ ۲) $\kappa = \frac{a^۲ + b^۲}{a}$ ۳) $\kappa = \frac{a}{a^۲ + b^۲}$ ۴) $\kappa = \frac{b}{a^۲ + b^۲}$

۱۲- انحنای منحنی C به معادلات پارامتری $y = f(t)$ و $x = g(t)$ که در لحظه t در معادلات $y' = ۲t$ و $x' = ۲$ صدق می‌کند، در لحظه $t = ۰$ کدام است؟ (سیستم - ۸۴)

۱) $\kappa = ۰$ ۲) $\kappa = ۱$ ۳) $\kappa = ۲$ ۴) $\kappa = \frac{۱}{۲}$

۱۳- خم هموار $\alpha(t)$ در فضای سه‌بعدی داده شده است. برای c ثابت که $|c| > ۱$، تبدیل $(x, y, z) \to (cx, cy, cz)$ خم α را به خم $\beta(t) = c\,\alpha(t)$ می‌نگارد. در مورد انحنای دو خم α و β در نقاط متناظر $\alpha(t_۰)$ و $\beta(t_۰)$ کدام حکم زیر درست است؟ (فلسفه علم - ۸۴)

۱) انحنای β به‌ازای $t_۰$ کوچکتر از انحنای α به‌ازای $t_۰$ است.
۲) انحنای β به‌ازای $t_۰$ بزرگتر از انحنای α به‌ازای $t_۰$ است.
۳) انحنای α و β به‌ازای $t_۰$ برابرند.
۴) مقایسه انحنا بستگی به علامت c دارد.

۱۴- خم فضایی دو بار مشتق‌پذیر $\alpha(t)$ داده شده است که به‌ازای هر t، بردارهای سرعت و شتاب آن راستاهای متفاوت دارند و مسیر حرکت همواره روی کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = R^۲$ قرار دارد. کدام‌یک از احکام زیر درست نیست؟ (فلسفه علم - ۸۳)

۱) انحنای مسیر در هیچ نقطه‌ای صفر نیست. ۲) حداکثر انحنای مسیر $\frac{۱}{R}$ است.
۳) تاب مسیر می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. ۴) بردار شتاب همواره به‌سوی داخل کره است.

۱۵- اگر شعاع یک دایره را چهار برابر کنیم، خمیدگی آن چند برابر می‌شود؟ (ژئوفیزیک - ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۶- شعاع انحناء منحنی به معادله $y = x - \sqrt{x}$ در نقطه $x = ۴$ واقع بر آن چقدر است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی - ۹۰)

۱) ۴۲/۵ ۲) ۵۲/۵ ۳) ۵۷/۵ ۴) ۶۲/۵

۱۷- انحنای سهمی به معادله $y^۲ = ۱۲x$ در نقطه $(۰, ۰)$ چقدر است؟ (فراوری و انتقال گاز - ۸۳)

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

۱۸- اگر $xy = ۱$ معادله منحنی C باشد، شعاع انحنا C در نقطه $(۱, ۱)$ کدام است؟ (مواد - ۸۸)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۹- خمیدگی منحنی $y=\cos x$ در کدام نقطه ماکزیمم است؟ (مکاترونیک - ۸۴)

۱) $(n\in\mathbb{N})\ x=n\pi$ ۲) $(n\in\mathbb{N})\ x=n\frac{\pi}{2}$ ۳) $(n\in\mathbb{N})\ x=\frac{n\pi}{3}$ ۴) $(n\in\mathbb{N})\ x=\frac{n\pi}{4}$

۲۰- اگر $\vec{r}(t)=\cos 2t\vec{i}+\sin^2 t\vec{j}+2\vec{k}$ یک خم فضایی باشد آنگاه پیچش مسیر τ **(torsion)** برابر است با:

۱) $\tau=0$ ۲) $\tau=\frac{1}{2}$ ۳) $\tau=2$ ۴) $\tau=1$ (ایمنی و بازرسی فنی - ۸۹)

۲۱- متحرکی در فضا بر روی صفحه $2x+5y-z=11$ حرکت می‌کند. تاب متحرک در یک نقطه دلخواه برابر است با:

۱) 0 ۲) $\frac{1}{\sqrt{30}}$ ۳) $\sqrt{14}$ ۴) $\sqrt{30}$ (فلسفه علم - ۹۲)

۲۲- شرط لازم برای آنکه منحنی با نمایش $\vec{r}=\vec{r}(t)$ در یک صفحه قرار گیرد (مسطح باشد) کدام است؟ (فیزیک دریا - ۹۱)

۱) $\vec{r}'\times\vec{r}''=0$ ۲) $\vec{r}'.\vec{r}''=0$ ۳) $r'\times(\vec{r}''\times\vec{r}''')=0$ ۴) $\vec{r}''\times\vec{r}'''=0$

۲۳- انحنا و تاب منحنی $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=1\end{cases}$ در نقطه $A(2,0,1)$ به‌ترتیب برابر است با: (نساجی - ۸۴)

۱) $\kappa=\frac{1}{2}$ و $\tau=0$ ۲) $\kappa=2$ و $\tau=1$ ۳) $\kappa=1$ و $\tau=\frac{1}{2}$ ۴) $\kappa=\frac{1}{2}$ و $\tau=1$

۲۴- تابع برداری $R(t)=(a+t^2)\vec{i}+(a-t^2)\vec{j}+btk$ در فضای سه‌بعدی داده شده، کـه در آن a و b ثابـت‌انـد و $b\neq 0$.
بردار قائم دوم به‌ازای هر t کدام است؟ (مکانیک - ۸۹)

۱) $\frac{1}{\sqrt{2+b^2}}(i-j-bk)$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$

۳) $\frac{1}{\sqrt{2+b^2}}(i-j+bk)$ ۴) $\frac{i+j}{\sqrt{2}}$

۲۵- اگر یک متحرک بر روی مسیری با خمیدگی $\kappa(t)\neq 0$ در فضا بـا سـرعت $v(t)$ و شـتاب $a(t)$ حرکـت کنـد، آنگـاه $v\times a=\alpha B$ که در آن B قائم دوم بر خم است. در این‌صورت ثابت α برابر است با: (هسته‌ای - ۸۵)

۱) $\kappa(t)|v(t)|$ ۲) $\kappa(t)|v(t)|^2$ ۳) $\kappa(t)|v(t)|^3$ ۴) $\kappa(t)$

۲۶- بردار یکه قائم اصلی یعنی $\vec{N}(t)$ برای مارپیچ $\vec{R}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$ کداد است؟ (مکانیک - ۸۶)

۱) $(-\cos t)i+(\sin t)j$ ۲) $(-\cos t)i+(-\sin t)j$

۳) $(\cos t)i+(-\sin t)j$ ۴) $(\cos t)i+(\sin t)j$

۲۷- صفحهٔ قائم بر منحنی فضایی $(x=t, y=t^2, z=t^3)$ در نقطه نظیر $t=1$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶ (آبیاری و زهکشی - ۹۰)

۲۸- معادله صفحه بوسان خم فضایی $f(t)=(t+\frac{1}{3}t^3)\vec{i}+(t-\frac{1}{3}t^3)\vec{j}+t^2\vec{k}$ در نقطه نظیر $t=1$ کدام است؟

۱) $x+y+2z=5$ ۲) $3x-3y-2z=0$ (MBA - ۸۹)

۳) $3x+2y-3z=-\frac{1}{3}$ ۴) $x+4y-2z=2$

۲۹- حرکت متحرکی در صفحه xy با رابطه $R(t)=(t\cos t)i+(t\sin t)j$ داده شده است. مؤلفه قائم شتاب کدام است؟

(مواد - ۸۸)

۱) $\frac{t^۲+۲}{\sqrt{t^۲+۱}}$ ۲) $\frac{۲t}{\sqrt{t^۲+۱}}$ ۳) $\frac{t^۲}{\sqrt{t^۲+۱}}$ ۴) $\sqrt{t^۲+۲}$

۳۰- انحنای منحنی $r=۱+\cos\frac{\theta}{۲}$ در نقطه $(r,\theta)=(۲,۰)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - ۸۹)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۳۱- انحنای منحنی $r=۲+\sin\theta$ در نقطه‌ای که $\theta=\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - ۹۱)

۱) $\frac{۳}{۲۷}$ ۲) $\frac{۹}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱۲}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲۴}{۲۷}$

۳۲- شعاع دایره بوسان (دایره انحنا) برای منحنی $y=x^۲-\sin x$ در نقطه $(۰,۰)$ کدام است؟ (نفت - ۸۹)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

* ۳۳- مختصات مرکز انحنای منحنی $\vec{R}(t)=(a\cos\omega t)\vec{i}+(a\sin\omega t)\vec{j}+bt\vec{k}$ در نقطه $t=\frac{\pi}{۲\omega}$ کدام است؟ ($a,b,\omega>۰$ پارامترهای ثابت هستند.) (مدیریت در سوانح طبیعی - ۸۴)

۱) $(۰,-\frac{b^۲}{a\omega^۲},\frac{b\pi}{۲\omega})$ ۲) $(-\frac{b^۲}{a\omega^۲},۰,\frac{b\pi}{۲\omega})$ ۳) $(\frac{a\pi}{۲\omega},-\frac{b^۲}{a\omega^۲},\frac{b\pi}{۲\omega})$ ۴) $(-\frac{b^۲}{a\omega^۲},\frac{b\pi}{۲\omega},\frac{a\pi}{۲\omega})$

پاسخنامه‌ی کلیدی

۱-	۲	۶-	۳	۱۱-	۳	۱۶-	۴	۲۱-	۱	۲۶-	۲	۳۱-	۳
۲-	۲	۷-	۱	۱۲-	۴	۱۷-	۲	۲۲-	۳	۲۷-	۴	۳۲-	۲
۳-	۲	۸-	۱	۱۳-	۱	۱۸-	۴	۲۳-	۱	۲۸-	۲	۳۳-	۱
۴-	۴	۹-	۳	۱۴-	۲	۱۹-	۱	۲۴-	۴	۲۹-	۱		
۵-	۲	۱۰-	۱	۱۵-	۱	۲۰-	۱	۲۵-	۳	۳۰-	۴		

پاسخ‌نامهٔ تشریحی سؤالات خودآزمایی را می‌توانید در سایت www.serieomomi.ir مشاهده نمایید.

تمرین ۸: ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۳ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید؟

الف) حاصل $|۵A|$ را بیابید. **ب)** حاصل $۵|A|$ را بیابید.

حل:

الف) برای حل این مثال ساده و یافتن $|۵A|$، ابتدا ماتریس $۵A$ را تشکیل می‌دهیم و سپس دترمینان این ماتریس را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم وقتی عددی در ماتریس ضرب می‌شود، آن عدد در تمام درایه‌های ماتریس ضرب شده و بنابراین داریم:

$$۵A=۵\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۳ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۵ & -۱۵ \\ ۵ & ۱۰ & ۰ \\ -۵ & ۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

حال با محاسبه دترمینان این ماتریس به دست می‌آید:

$$|۵A|=\begin{vmatrix} \overset{+}{۱۰} & \overset{-}{۵} & \overset{+}{-۱۵} \\ ۵ & ۱۰ & \overset{-}{۰} \\ -۵ & ۵ & \overset{+}{۵} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به ستون سوم}}$$

$$+(-۱۵)\begin{vmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۵ & ۵ \end{vmatrix}-(۰)\begin{vmatrix} ۱۰ & ۵ \\ -۵ & ۵ \end{vmatrix}+(۵)\begin{vmatrix} ۱۰ & ۵ \\ ۵ & ۱۰ \end{vmatrix}=(-۱۵)(۲۵-(-۵۰))-۰+۵(۱۰۰-۲۵)=-۷۵۰$$

ب) برای یافتن $۵|A|$، ابتدا دترمینان ماتریس A را یافته و سپس در عدد ۵ ضرب می‌کنیم.

$$|A|=\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & \overset{+}{-۳} \\ ۱ & ۲ & \overset{-}{۰} \\ -۱ & ۱ & \overset{+}{۱} \end{vmatrix}=+(-۳)\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}-(۰)\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}+(۱)\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=(-۳)(۱-(-۲))-۰+(۱)(۴-۱)=-۶$$

بنابراین $۵|A|=-۳۰$ است.

برای درک بهتر شما عزیزان، نتیجه‌گیری‌های زیر از این تمرین آورده شده است:

نتیجه‌گیری

۱- اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد و k عددی ثابت باشد، $|kA_{n\times n}|=k^n|A|$ است.

یک لحظه به تمرین قبل برگردیم. ماتریس داده شدهٔ A در تمرین قبل ماتریسی ۳×۳ بود و $|A|=-۶$ است. بنابراین طبق نتیجه (۱) داریم:

$$|۵A_{۳\times۳}|=۵^۳|A|=۵^۳(-۶)=-۷۵۰$$

۲- وقتی عدد ثابت k در یک دترمینان ضرب می‌شود (یعنی $k|A|$) مشابه با آن است که یکی از سطرها و یا یکی از ستون‌های ماتریس در k ضرب شود. به بیان ساده‌تر اگر سطری یا ستونی از یک ماتریس مربعی را در عددی ثابت مانند k ضرب کنیم، مثل این است که در جواب دترمینان آن ماتریس k را ضرب کرده‌ایم.