

الله أكبر
محمد الرحمن

به نام یکتا مهندس هستی...



مقدمه و راهنمای مطالعه این کتاب:

انگار همین دیروز بود، معلم ما وارد کلاس شد و با یک گچ زرد رنگ بر روی تخته سیاه نوشت «درس ریاضی». به دنبال آن با صدای بلند گفت: درس ریاضی اصلی‌ترین و سخت‌ترین درس شماست که باید خیلی آن را جدی بگیرید، وگرنه در امتحان مردود می‌شوید. شما برای قبول شدن در این درس باید تلاش کنید، در کلاس به هیچ‌وجه حرف نزنید، تمرین‌های کتاب را تک‌تک حل کنید و... .

همین عبارات جدی بگیرید، حرف نزنید، تمرین زیاد حل کنید و...، که بارها تا پایان دوره دبیرستان و با کمی تغییر لحن در دانشگاه نیز آن را شنیده‌ایم ترس از یاد نگرفتن مفاهیم ریاضی را در بسیاری از ما نهادینه کرده است. این در حالی است که اصلی‌ترین مشکل دانشجویان در یادگیری درس شیرین ریاضی، مراجع (کتاب‌ها، جزوات و...) آن است که با بی‌چهارچوبی و نامرتب‌بودن، انگیزه افراد را از بین می‌برند. البته گاهی شیوه تدریس اشتباه معلمان و اساتید نیز بر آن می‌افزاید. ما معتقدیم درک ریاضی نیاز به استعداد و هوش ندارد و هر کسی در هر سطحی با شیوه آموزش درست و کمی تلاش می‌تواند این درس را به‌خوبی یاد بگیرد.

در این کتاب که در حدود ۲ سال نگارش آن زمان برده است، با عشق و علاقه، کلیه مراجع و منابع جدید این درس را، که در بهترین دانشگاه‌های دنیا تدریس می‌شوند، در کنار تجربیات خود قرار دادیم و تلاش کردیم تا نشان دهیم که ما می‌توانیم به جذاب‌ترین شکل ممکن ریاضی را به شما بیاموزیم و ترس از این درس را از بین ببریم. برای استفاده هر چه بهتر از این کتاب به موارد زیر توجه کنید:

- 1 در اولین قدم برای بهتر شدن روند یادگیری شما عزیزان، هر فصل را به چند قسمت کوچکتر تقسیم کرده‌ایم تا هم تفکیک مطالب در ذهن شما بهتر انجام شود و هم از مطالعه یک فصل طولانی خسته نشوید. همچنین می‌توانید در هر بار مطالعه، یک قسمت از هر فصل را به‌خوبی بخوانید.

- 2 برای چیدمان تمرین‌ها ساعت‌ها فکر کرده‌ایم و تمرین‌ها را با یک روند آموزشی بسیار منظم آورده‌ایم. همچنین در لابه‌لای تمرین‌ها مطالبی از قبیل کمی خلاقیت، کمی دقت و ... گنجانده‌ایم تا شما را به ریاضی علاقه‌مندتر کنیم.

- 3 در دومین قدم بعد از مطالعه دقیق درسنامه‌های هر فصل، بخشی تحت عنوان افزایش مهارت و تسلط بیشتر را در کتاب قرار دادیم که با مطالعه دقیق آن به جرأت می‌توان گفت هیچ تستی باقی نمی‌ماند که ایده اصلی آن برای شما آشنا نباشد.

- 4 در قدم بعد بخش جذاب توصیه‌نامه را در کتاب قرار داده‌ایم تا بعد از مطالعه کامل هر فصل، یک‌بار دیگر نکات مهم و کاربردی آن را با هم مرور کنیم.

- 5 اگر موارد فوق را به‌خوبی انجام داده باشید، قادر خواهید بود که تست‌های انتهای هر فصل را خودتان حل کنید. از سوی دیگر در نظرسنجی که از تعداد زیادی از دانشجویان انجام دادیم، متقاعد شدیم که به‌جای حل تشریحی، پاسخ کلیدی سوالات را در انتهای هر فصل کتاب ارائه کنیم (پاسخ تشریحی کامل‌تر را می‌توانید در سایت www.serieomomi.ir مشاهده کنید).

جالب است بدانید بعد از گذشت فقط یک سال از چاپ اول، ویرایش جدید کتاب را برای شما عزیزان فراهم آوردیم تا از یک سو با برطرف کردن نقاط ضعف و تقویت نقاط قوت کتاب و از سوی دیگر با به روزرسانی مسائل (سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۹۴) در درسامه هر فصل، بتوانیم در این مسیر پرپیچ و خم همراه شایسته‌ای برای شما باشیم.

همزمان با ویرایش جدید کتاب، سایت www.serieomomi.ir نیز به شکل فعال‌تر، با تیم قدرتمندتر و در سطح بسیار وسیع‌تری، بعد از شناسایی تمامی نیازهای شما آماده خدمات رسانی به دانشجویان عزیز است. خدمات ارائه شده در سایت سری عمومی عبارت است از:

- ۱- پاسخ دهی به سوالات شما عزیزان و رفع اشکال به صورت روزانه
- ۲- ارائه برنامه مطالعه کتاب به صورت هفتگی
- ۳- برگزاری آزمون به صورت ماهانه
- ۴- مشاوره تخصصی درس ریاضیات
- ۵- ارائه پاسخ تشریحی سوالات کنکور سراسری در رشته‌های مختلف
- ۶- بودجه‌بندی سوالات کنکور رشته‌های مختلف
- ۷- نمایش فیلم‌های آموزشی کوتاه

امیدواریم که به نوعی بزرگترین کلاس درس ریاضی را با کمک شما دانشجویان عزیز تشکیل داده و تا رسیدن به سطح عالی ریاضیات با شما همراه باشیم.

۶ تجربه نشان داده است، کسانی که ریاضی را با این شیوه نوین یاد می‌گیرند، قادر خواهند بود آن را با کیفیت خوبی تدریس کنند. از اینرو صمیمانه از شما تقاضا داریم بعد از مطالعه این کتاب، مباحث جدیدی که یاد گرفته‌اید را به دوستان خود نیز بیاموزید تا این مفاهیم ناب ریاضی در سراسر این مرز و بوم، حتی دورترین و محروم‌ترین نقاط کشور نیز انتشار یابد.

در این قسمت ابتدا از خانواده‌های صبورمان که در تمامی مراحل تهیه این کتاب پا به پای ما، فشار این کار را تحمل کردند، نهایت تشکر و قدردانی را داریم. در ادامه از دوست ارجمند، دکتر محمد آهنگر که در لحظه لحظه تألیف این کتاب ما را یاری کرده و از نظرات ارزشمندشان بهره بردیم، تشکر می‌کنیم. لازم است از جناب آقای دکتر شریفیان مدیریت محترم انتشارات، که تمام امکانات لازم جهت هر چه بهتر انجام شدن این پروژه را در اختیار ما گذاشته‌اند و همچنین ویراستاران این اثر، سرکار خانم مهندس الهام طاهرشمس و سرکار خانم مهندس فریبا محمدی‌منش نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشیم.

علاوه بر تلاش‌های فراوانی که برای بازبینی این کتاب شده است، وجود اشکال در آن ممکن بوده و از اساتید گرانقدر و دانشجویان عزیز تقاضا می‌شود، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق سایت www.serieomomi.ir مطرح نمایند.

محمد صادق معتقدی - مسعود مهدیان - مجید فرقانی

فصل اول

حد

۱۶۰	معادله خط مماس و قائم بر یک منحنی	۸	بررسی مفاهیم اولیه حد
۱۶۷	بررسی صعودی و نزولی بودن تابع	۱۵	حد با جواب قابل پیش بینی
۱۷۱	اکستریم‌های نسبی و مطلق	۲۶	حالت‌های مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$
۱۸۰	تقعر و نقطه عطف	۴۲	حالت‌های مبهم $\infty - \infty$ و $0 \times \infty$
۱۹۰	قضایای رل و مقدار میانگین	۴۷	حالت‌های مبهم نمایی
۱۹۵	اظهار نظر در مورد ریشه‌های معادله	۵۳	افزایش مهارت و تسلط بیشتر
۲۰۲	سایر کاربردهای مشتق	۶۱	توصیه‌نامه فصل اول
۲۰۸	افزایش مهارت و تسلط بیشتر	۶۳	تست‌های فصل اول
۲۱۶	توصیه‌نامه فصل چهارم		
۲۱۸	تست‌های فصل چهارم		

فصل دوم

مجانِب و پیوستگی

۷۲	مجانِب	۷۲	مجانِب
۸۳	پیوستگی	۸۳	پیوستگی
۹۴	افزایش مهارت و تسلط بیشتر	۹۴	افزایش مهارت و تسلط بیشتر
۹۹	توصیه‌نامه فصل دوم	۹۹	توصیه‌نامه فصل دوم
۱۰۱	تست‌های فصل دوم	۱۰۱	تست‌های فصل دوم

فصل سوم

مفهوم مشتق و تکنیک‌های مشتق‌گیری

۱۰۸	مفاهیم اولیه مشتق	۱۰۸	مفاهیم اولیه مشتق
۱۲۱	تکنیک‌های مشتق‌گیری (۱)	۱۲۱	تکنیک‌های مشتق‌گیری (۱)
۱۳۰	تکنیک‌های مشتق‌گیری (۲)	۱۳۰	تکنیک‌های مشتق‌گیری (۲)
۱۴۳	افزایش مهارت و تسلط بیشتر	۱۴۳	افزایش مهارت و تسلط بیشتر
۱۴۸	توصیه‌نامه فصل سوم	۱۴۸	توصیه‌نامه فصل سوم
۱۵۰	تست‌های فصل سوم	۱۵۰	تست‌های فصل سوم

فصل چهارم

کاربردهای مشتق

فصل پنجم

تکنیک‌های انتگرال‌گیری

۲۲۸	آشنایی با روابط انتگرال‌گیری و ایده‌های اولیه	۲۲۸	آشنایی با روابط انتگرال‌گیری و ایده‌های اولیه
۲۳۹	حل انتگرال‌های رادیکالی	۲۳۹	حل انتگرال‌های رادیکالی
۲۴۵	حل انتگرال‌های کسری	۲۴۵	حل انتگرال‌های کسری
۲۵۲	انتگرال توابع مثلثاتی	۲۵۲	انتگرال توابع مثلثاتی
۲۶۰	بررسی بیشتر روش جزء به جزء	۲۶۰	بررسی بیشتر روش جزء به جزء
۲۶۶	افزایش مهارت و تسلط بیشتر	۲۶۶	افزایش مهارت و تسلط بیشتر
۲۷۳	توصیه‌نامه فصل پنجم	۲۷۳	توصیه‌نامه فصل پنجم
۲۷۶	تست‌های فصل پنجم	۲۷۶	تست‌های فصل پنجم

فصل ششم

انتگرال معین و ناسره

۲۸۴	آشنایی با انتگرال معین و خواص آن	۲۸۴	آشنایی با انتگرال معین و خواص آن
۲۹۵	قضایای انتگرال معین و کاربرد آنها	۲۹۵	قضایای انتگرال معین و کاربرد آنها

۳۰۵.....	انتگرال‌های ناسره
۳۱۷.....	افزایش مهارت و تسلط بیشتر
۳۳۴.....	توصیه‌نامه فصل ششم
۳۳۵.....	تست‌های فصل ششم
۴۶۳.....	محاسبه ریشهٔ n ام یک عدد مختلط
۴۶۹.....	شکل‌های هندسی در صفحهٔ مختلط
۴۷۵.....	افزایش مهارت و تسلط بیشتر
۴۷۹.....	توصیه‌نامه فصل نهم
۴۸۰.....	تست‌های فصل نهم

فصل هفتم

کاربرد انتگرال

۳۴۶.....	محاسبهٔ مساحت
۳۵۱.....	محاسبهٔ طول قوس
۳۵۴.....	محاسبهٔ حجم حاصل از دوران
۳۶۴.....	محاسبهٔ سطح حاصل از دوران
۳۶۸.....	کاربرد انتگرال معین در منحنی‌های پارامتری
۳۷۱.....	گشتاور و مرکز جرم
۳۷۳.....	محاسبهٔ حد با تعداد جملات نامتناهی
۳۸۵.....	افزایش مهارت و تسلط بیشتر
۳۹۲.....	توصیه‌نامه فصل هفتم
۳۹۵.....	تست‌های فصل هفتم
۴۸۶.....	دنباله
۴۹۵.....	سری‌های عددی
۵۱۱.....	سری‌های توانی
۵۱۷.....	سری‌های تیلور و مک‌لورن
۵۲۸.....	محاسبهٔ مقدار یک سری عددی
۵۳۸.....	افزایش ادراک و تسلط بیشتر
۵۴۷.....	توصیه‌نامه فصل دهم
۵۴۹.....	تست‌های فصل دهم

فصل دهم

دنباله و سری

فصل ییوست

یادآوری مفاهیم پایه

۵۶۲.....	یادآوری یک (مفاهیم مقدماتی)
۵۶۸.....	یادآوری دو (تابع)
۵۷۷.....	یادآوری سه (توابع مثلثاتی و معکوس آنها)
۵۸۲.....	یادآوری چهار (توابع توانی و لگاریتمی)
۵۸۴.....	یادآوری پنج (توابع هایپربولیک و معکوس آنها)
۵۸۷.....	یادآوری شش (تابع جزء صحیح و خواص آن)
۵۸۹.....	یادآوری هفت (تابع قدرمطلق و خواص آن)
۵۹۱.....	یادآوری هشت (رسم نمودار)

آزمون‌های سراسری سال ۹۴..... ۵۹۲

فصل هشتم

مختصات قطبی

۴۰۴.....	مفاهیم مختصات قطبی
۴۱۳.....	رسم نمودار در دستگاه مختصات قطبی
۴۲۸.....	مسائل ترکیبی مختصات قطبی با
۴۲۸.....	فصل‌های قبل
۴۳۶.....	افزایش مهارت و تسلط بیشتر
۴۳۹.....	توصیه‌نامه فصل هشتم
۴۴۰.....	تست‌های فصل هشتم

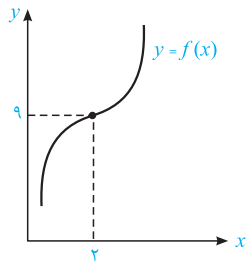
فصل نهم

اعداد مختلط

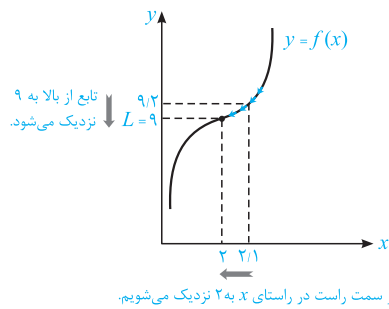
۴۴۴.....	مفاهیم اولیهٔ اعداد مختلط
۴۵۴.....	نمایش قطبی اعداد مختلط

۱-۱- تعریف حد

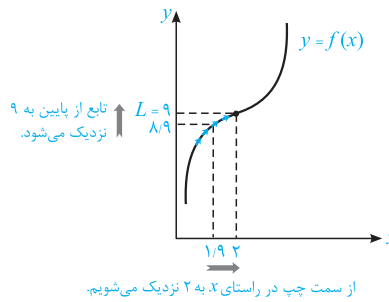
به طور کلی یک حد را به شکل $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ نشان می‌دهیم و بر طبق آن می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت x_0 میل می‌کند، برابر L است. مفهوم حد فوق این است که هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم $f(x)$ را به سمت L نزدیک کنیم، در صورتیکه x به اندازه کافی به نقطه x_0 نزدیک شده باشد (اما x برابر با x_0 نشده باشد).



برای درک بهتر این مفهوم، به نمودار مقابل توجه کنید. با کمی دقت در این نمودار می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:



۱- در این نمودار با نزدیک شدن از سمت راست به عدد $x_0 = 2$ بر روی محور x (مثلاً از $2/1$ به سمت 2 حرکت می‌کنیم)، مقدار تابع $f(x)$ نیز بر روی محور y از بالا به عدد $L = 9$ نزدیک می‌شود (مثلاً از $9/2$ به 9 نزدیک می‌شود).



۲- اگر از سمت چپ بر روی محور x به سمت عدد $x_0 = 2$ نزدیک شویم (مثلاً از $1/9$ به سمت 2 حرکت کنیم)، می‌توان مشاهده کرد که مقدار تابع بر روی محور y از پایین به عدد $L = 9$ نزدیک می‌شود (مثلاً از $8/9$ به 9 نزدیک می‌شود).

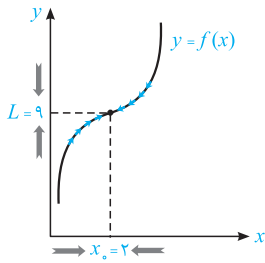
زیر شاخه‌های قسمت اول

۱-۱- تعریف حد

۲-۱- بررسی مفهوم همسایگی

در حد و مفاهیم حد چپ و راست

دانشجویان عزیز توجه کنید که آخرین فصل کتاب، فصلی به نام پیوست است که در آن مفاهیم ریاضیات دوران دبیرستان را دوره کرده‌ایم. در صورتی که این مفاهیم را فراموش کرده‌اید، ابتدا نگاهی گذرا بر روی آن فصل بیاندازید.

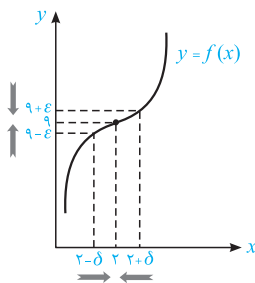


۳- حال از دو طرف در راستای محور x به عدد $x_0 = 2$ نزدیک می‌شویم و مشاهده می‌کنیم که تابع $f(x)$ در راستای y از بالا و پایین به عدد $L = 9$ نزدیک می‌شود و این همان تعریف ساده‌ی حد است که برای این مثال به صورت زیر بیان می‌شود:

هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم $f(x)$ را به ۹ نزدیک کنیم، در صورتیکه x را به اندازه کافی به ۲ نزدیک کرده باشیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

۲-۸- بررسی مفهوم همسایگی در حد و مفاهیم حد چپ و راست



در ادامه بحث، با توجه به نمودار مقابل مشاهده می‌کنیم که با نزدیک شدن x به عدد ۲، $f(x)$ به عدد ۹ نزدیک می‌شود. با کمی توجه در این شکل می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- فرض کنید بخواهیم $f(x)$ به اندازه‌ای به عدد ۹ نزدیک شود که در بازه $(9-\epsilon, 9+\epsilon)$ قرار گیرد، یعنی به‌ازای یک عدد کوچک دلخواه داده شده $\epsilon > 0$ ، $f(x)$ عضو بازه $(9-\epsilon, 9+\epsilon)$ باشد. این موضوع یعنی فاصله مقدار تابع از ۹ کمتر از ϵ باشد $|f(x) - 9| < \epsilon$ و به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

$$* \forall \epsilon > 0, \quad 9 - \epsilon < f(x) < 9 + \epsilon \Leftrightarrow |f(x) - 9| < \epsilon \quad (1)$$

۲- در این صورت همانطور که از شکل پیداست، می‌توان عدد کوچکی مانند $\delta > 0$ را به‌گونه‌ای یافت که وقتی x در بازه $(2-\delta, 2+\delta)$ قرار گیرد، آنگاه $f(x)$ در بازه $(9-\epsilon, 9+\epsilon)$ باشد و می‌توان نوشت:

$$x \in (2-\delta, 2+\delta) \Leftrightarrow 2-\delta < x < 2+\delta \Leftrightarrow |x-2| < \delta \quad (2)$$

۳- بنابراین با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان مفهوم حد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$ را به بیان ریاضی به صورت زیر نوشت:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{به‌طوری‌که} \quad |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-9| < \epsilon$$

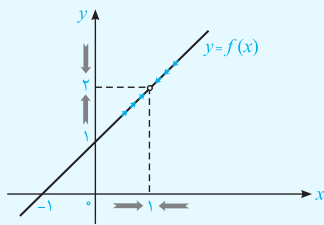
بنابراین برای اثبات وجود حد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$ ، کافی است برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه، عدد $\delta > 0$ را به‌گونه‌ای تعیین

کنیم که بتوان از نامساوی $|x-2| < \delta$ ، نامساوی $|f(x)-9| < \epsilon$ را نتیجه گرفت (معمولاً δ را برحسب ϵ تعیین می‌کنند).

* آشنایی با چند علامت ساده در تعاریف ریاضی $\Leftarrow \forall$: به‌ازای هر، \exists : وجود دارد



بررسی چند نکته مفهومی

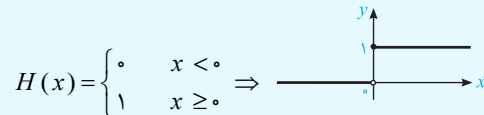


۱ نمودار یک تابع مطابق شکل مقابل را در نظر بگیرید. می‌خواهیم با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، در مورد حد آن در نقطه $x=1$ اظهار نظر کنیم:

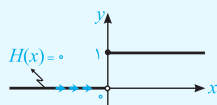
همانطور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنیم، اگر روی نمودار $f(x)$ راستای محور x ‌ها به عدد ۱ نزدیک شویم، مقدار تابع در راستای محور y ‌ها به عدد ۲ نزدیک می‌شود. پس می‌توان نوشت: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

این در حالی است که مقدار تابع در $x=1$ تعریف نشده است. بنابراین می‌توان دریافت که در محاسبه حد، کاری به مقدار تابع در آن نقطه نداریم بلکه کافی است تابع در یک همسایگی محذوف نقطه مورد نظر تعریف شده باشد. همسایگی که نقطه x از آن حذف شده باشد را **همسایگی محذوف** x می‌نامند.

۲ تابع هوی‌ساید که به افتخار آقای اولیور هوی‌ساید، مهندس الکترونیک هلندی نام‌گذاری شده است، برای نشان دادن جریان الکتریکی هنگام زدن کلید در زمان $t=0$ به کار می‌رود، که به صورت زیر تعریف می‌شود:



نمودار این تابع را در شکل فوق در نظر گرفته و به موارد زیر توجه کنید:



(الف) وقتی x از سمت چپ به صفر میل می‌کند (نزدیک می‌شود)، مقدار تابع $H(x)$ در نزدیکی صفر برابر صفر است و در اصطلاح می‌گوییم حد چپ تابع در نقطه صفر، برابر است با: $\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0$



(ب) زمانی که x از سمت راست به عدد صفر نزدیک می‌شود، مقدار تابع $H(x)$ برابر یک است و می‌گوییم که حد راست تابع در نقطه صفر، برابر است با: $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1$

تذکره: احتمالاً متوجه شده‌اید که $x \rightarrow 0^-$ یعنی x از طرف اعداد کوچکتر از صفر (سمت چپ) به صفر میل می‌کند (به طور مثال 0.1^-). بنابراین می‌توان گفت که صفر منفی (0^-)، یک عدد منفی بسیار نزدیک به صفر و به همین ترتیب، صفر مثبت (0^+) یک عدد مثبت بسیار نزدیک به صفر است.

۳ شرط لازم و کافی برای آنکه تابع در یک نقطه حد داشته باشد، آن است که اولاً حد چپ و راست وجود داشته و ثانیاً مقدار این دو حد با هم برابر باشند. با توجه به این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که تابع هوی‌ساید $H(x)$ در نقطه صفر حد ندارد.

۴ توابع چند جمله‌ای، توانی، مثلثاتی، هایپربولیک، کسری، لگاریتمی و معکوسشان در دامنه تعریف خود، همواره دارای حد می‌باشند و حدشان با مقدارشان برابر است. پس در اینگونه توابع با قرار دادن نقطه مورد نظر در ضابطه تابع، جواب حد آنها به سادگی قابل محاسبه است.

مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 3x - 1) = 2 \times 0^2 + 3 \times 0 - 1 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sinh x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^1 - e^{-1}}{2}$$

در ادامه با چند تمرین، مفاهیم ارائه شده را برای شما بیشتر بررسی می‌کنیم.

تمرین ۱: برای اثبات حد تابع $f(x) = 4x^2 + 4x$ در همسایگی $x_0 = -\frac{1}{4}$ با انتخاب $\varepsilon = \frac{1}{64}$ ، حداکثر δ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۱) \quad \frac{1}{۱۶} \quad (۲) \quad \frac{1}{۶۴} \quad (۳) \quad \frac{1}{۱۲۸} \quad (۴) \quad (\text{منابع - ۸۷})$$

هله: با توجه به مفهوم ریاضی حد، می‌توان نوشت:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{به طوری که } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

با جایگذاری $x_0 = -\frac{1}{4}$ و $L = f(-\frac{1}{4}) = 4 \times (-\frac{1}{4})^2 + 4 \times (-\frac{1}{4}) = -1$ در رابطه بالا به دست می‌آید:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{به طوری که } |x - (-\frac{1}{4})| < \delta \Rightarrow |f(x) - (-1)| < \frac{1}{64}$$

معمولاً در چنین مواقعی برای محاسبه δ ، از عبارت دوم ($|f(x) - L| < \varepsilon$) شروع می‌کنیم و با ساده کردن آن تلاش می‌کنیم به عبارت اول ($|x - x_0| < \delta$) برسیم و به این ترتیب δ به دست می‌آید، پس داریم:

$$|f(x) - L| < \frac{1}{64} \Leftrightarrow |4x^2 + 4x - (-1)| < \frac{1}{64} \Leftrightarrow |4x^2 + 4x + 1| < \frac{1}{64} \Leftrightarrow |(2x + 1)| < \frac{1}{64}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}} |2x + 1| < \frac{1}{8} \xrightarrow{\text{طرفین را به ۲ تقسیم می‌کنیم}} |x + \frac{1}{2}| < \frac{1}{16} \quad (۱)$$

یکبار دیگر مفهوم حد را می‌نویسیم:

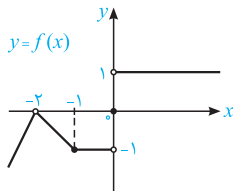
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{به طوری که } |x + \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow |f(x) + 1| < \frac{1}{64} \stackrel{(۱)}{\Leftrightarrow} |x + \frac{1}{2}| < \frac{1}{16}$$

پس می‌توان نوشت:

$$|x + \frac{1}{2}| < \frac{1}{16} \xrightarrow{\text{معادل است با}} |x + \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow \delta \leq \frac{1}{16}$$

بنابراین حداکثر δ برابر است با $\frac{1}{16}$ و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

تمرین ۲: با توجه به شکل زیر، جواب حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



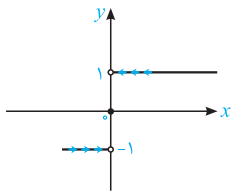
الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

هله: در این سؤال می‌خواهیم مفهوم حد چپ و راست را کمی بهتر درک کنیم. به همین منظور به توضیحات داده شده توجه کنید:

الف) برای محاسبه حد تابع $f(x)$ در نقطه صفر، باید حد چپ و راست را جداگانه در آن نقطه محاسبه کرد. با توجه به شکل، حد راست $f(x)$ در نقطه $x = 0$ برابر ۱ و حد چپ آن برابر -۱ است:



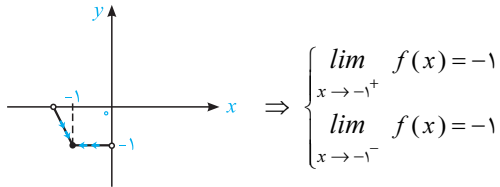
$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

بنابراین حد چپ و راست برابر نبوده و در نتیجه تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ حد ندارد.



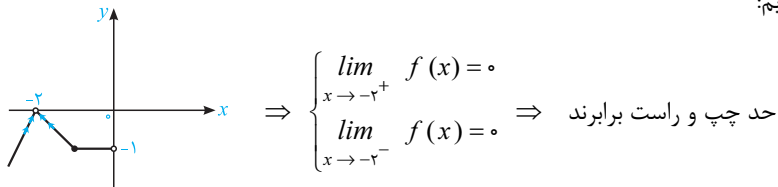
ب) در راستای محور x ، با نزدیک شدن به -1 چه از سمت چپ و چه از سمت راست، نمودار $f(x)$ در راستای محور y نیز به عدد (-1) نزدیک می‌شود:



بنابراین حد چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ برابر -1 بوده و در نتیجه تابع در این نقطه حد دارد و حد آن برابر -1 است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$$

ج) وقتی از سمت چپ و راست روی نمودار $y = f(x)$ به نقطه $x = -2$ نزدیک می‌شویم، تابع به سمت صفر نزدیک می‌شود، پس داریم:



بنابراین حد تابع در این نقطه برابر صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

تمرین ۳: در نقطه $x = 0$ برای تابع $y = f(x)$ حد چپ برابر A و حد راست برابر B است، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - x^4)$

(۸۸ - MBA)

کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $A + B$ (۴) حد ندارد

هله: با کمی دقت، از صورت سؤال می‌توان فهمید که:

$$\begin{cases} \text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0^-) = A & (۱) \\ \text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0^+) = B & (۲) \end{cases}$$

می‌دانیم که وقتی $0 < x < 1$ است، هر چه توان x بزرگتر باشد، حاصل آن کوچکتر است. با توجه به این موضوع در نزدیکی صفر (چه از سمت راست و چه از سمت چپ) x^2 از x^4 بزرگتر است و می‌توان نوشت:

$$x \rightarrow 0 : x^2 > x^4 \Rightarrow x^2 - x^4 > 0$$

بنابراین در حد بالا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - x^4) \stackrel{x^2 - x^4 > 0}{=} f(0^+) \stackrel{(۲)}{=} B \quad \text{(گزینه ۲)}$$



● **دقت:** وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، مثلاً می‌توان فرض کرد که $x = \pm 0/01$ باشد و می‌دانیم $(\pm 0/01)^2$ به توان ۲ از $(\pm 0/01)^4$ به توان ۴ بزرگتر است و می‌توان نوشت:
 $x \rightarrow 0 : x = \pm 0/01 \Rightarrow (\pm 0/01)^2 > (\pm 0/01)^4 \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^2 > x^4 \Rightarrow x^2 - x^4 > 0$
 احتمالاً متوجه شدید که هدف از حل این تست، افزایش تسلط شما بر روی مفهوم همسایگی و حد چپ و راست بود.

نکته کاربردی

همانطور که می‌دانید حاصل تقسیم عدد ناصفر بر صفر حدی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. در چنین مواردی تعیین نوع بی‌نهایت، (مثبت بی‌نهایت و یا منفی بی‌نهایت)، برای ما بسیار حائز اهمیت است. برای تعیین این موضوع به جدول زیر توجه کنید:

انواع بی‌نهایت	جواب	مثال
$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{صفر مثبت}}$	$+\infty$	$\frac{+2}{+0/000001} = 2000000 \rightarrow +\infty$
$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{صفر منفی}}$	$-\infty$	$\frac{+2}{-0/000001} = -2000000 \rightarrow -\infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{صفر مثبت}}$	$-\infty$	$\frac{-2}{+0/000001} = -2000000 \rightarrow -\infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{صفر منفی}}$	$+\infty$	$\frac{-2}{-0/000001} = +2000000 \rightarrow +\infty$

به‌طور مشابه می‌دانیم حاصل تقسیم عدد ناصفر تقسیم بر بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کند، ولی بعضی مواقع لازم است نوع صفر مشخص شود (صفر مثبت یا صفر منفی). برای تعیین این موضوع به جدول زیر توجه کنید:

انواع صفر	جواب	مثال
$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{مثبت بی‌نهایت}}$	0^+	$\frac{+2}{+2000000} = 0/000001 \rightarrow 0^+$
$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{منفی بی‌نهایت}}$	0^-	$\frac{+2}{-2000000} = -0/000001 \rightarrow 0^-$
$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{مثبت بی‌نهایت}}$	0^-	$\frac{-2}{+2000000} = -0/000001 \rightarrow 0^-$
$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{منفی بی‌نهایت}}$	0^+	$\frac{-2}{-2000000} = +0/000001 \rightarrow 0^+$

تمرین ۴: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$ مفروض است، مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(1 - \frac{1}{n}) - f(2 + \frac{1}{n})]$ را بیابید.

(علوه کامپیوتر - ۸۳)

$$-1 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad 4$$



هله: برای محاسبه حد داده شده، به موارد زیر توجه کنید:

۱- طبق نکته قبل می‌دانیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = \frac{\text{عدد مثبت}}{\text{مثبت بی‌نهایت}} = 0^+ \quad (1)$$

۲- با جایگذاری 0^+ در صورت حد داده شده، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] \stackrel{(1)}{=} f(1 - 0^+) - f(2 + 0^+) = f(1^-) - f(2^+) \quad (2)$$

← کمی کوچکتر از یک
→ کمی بزرگتر از دو

۳- می‌دانیم که مقدار $f(1^-)$ از ضابطه اول و $f(2^+)$ از ضابطه سوم به دست می‌آید و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{ضابطه اول: } f(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow f(1^-) = \frac{1-1}{2} = 0 & (2) \\ \text{ضابطه سوم: } f(x) = 1 \Rightarrow f(2^+) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{حد} = f(1^-) - f(2^+) = 0 - 1 = -1$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

کمی تمرین*

اگر در تعریف حد، به ازای $\delta < |x-1| < \delta$ نتیجه بگیریم $\frac{1}{(x-1)^4} > 10^8$ ، آنگاه δ کدام است؟

$$\delta \leq \frac{1}{100000} \quad (4) \quad \delta \leq \frac{1}{1000} \quad (3) \quad \delta \leq \frac{1}{100} \quad (2) \quad \delta \leq \frac{1}{10} \quad (1)$$

راهنمایی: مشابه تمرین (۱) در صفحه ۱۱، با استفاده از تعریف حد جواب سؤال برابر $\delta \leq \frac{1}{100}$ است.

پس از ایجاد درک مناسب از مفهوم حد و همسایگی برای شما عزیزان در قسمت بعد می‌خواهیم شما را با حدهایی با جواب قابل پیش‌بینی آشنا کنیم.

* تا انتهای کتاب بخش‌هایی تحت عنوان کمی تمرین مطرح شده است که بعد از مطالعه درسنامه هر قسمت و با کمک راهنمایی‌های انجام شده باید بتوانید آن را حل کنید.

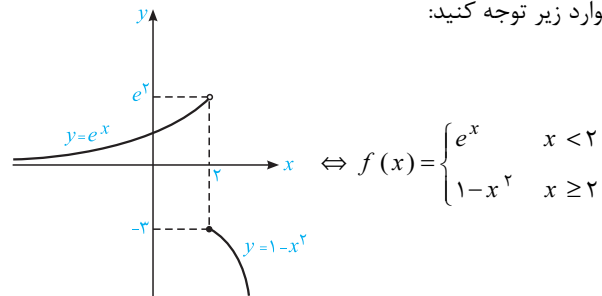
در این بخش، با گروهی از حدها آشنا می‌شویم که در محاسبه آنها، به حالت مبهمی بر نمی‌خوریم. در این توابع برای یافتن جواب حد و یا تشخیص اینکه حد وجود دارد یا خیر، مجبور به بررسی جداگانه حد چپ و راست هستیم. به طور کلی، این دسته از حدها را می‌توان به سه دسته زیر تقسیم کرد:

۱- حد توابع چندضابطه‌ای؛ ۲- حد توابع شامل قدرمطلق؛ ۳- حد توابع شامل جزء صحیح

در ادامه هر یک از این قسمت‌ها را به طور کامل بررسی می‌کنیم.

۱-B-۱ حد توابع چندضابطه‌ای

به منظور آشنایی با توابع چندضابطه‌ای، تابع $f(x)$ در شکل زیر را در نظر گرفته و به موارد زیر توجه کنید:



۱- همانطور که مشاهده می‌کنید تابع $f(x)$ ، یک تابع دو ضابطه‌ای است که به ازای x های کوچکتر از ۲ برابر با e^x و به ازای x های بزرگتر یا مساوی ۲، برابر با $1 - x^2$ می‌باشد.

۲- به دلیل آنکه در این گروه از توابع، در یک یا چند نقطه ضابطه تابع عوض می‌شود، از این رو حاصل حد چپ و راست در این نقاط، از دو ضابطه مختلف به دست می‌آید.

۳- با توجه به این موضوع، نکته اساسی در محاسبه حد توابع چندضابطه‌ای، توجه به حد چپ و راست در نقاط مرزی بین ضابطه‌ها است (همانطور که در تمرین ۴ بخش A دیدیم).

به عنوان مثال، اگر بخواهیم حد تابع $f(x)$ در بالا را در نقطه $x = 2$ بررسی کنیم، داریم:

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1 - x^2) = 1 - 4 = -3$$

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^x = e^2$$

از آنجایی که حد چپ و راست در نقطه $x = 2$ برابر نیستند، پس این تابع در آن نقطه حد ندارد (این موضوع به سادگی از شکل تابع نیز قابل تشخیص است).

- زیر شاخه‌های قسمت دوم
- ۱-B-۱ حد توابع چندضابطه‌ای
- ۲-B-۲ حد توابع شامل قدرمطلق
- ۳-B-۳ حد توابع شامل جزء صحیح

توصیه‌نامه

حد

می‌خواهیم یک‌بار دیگر نکات مهم و پرتکرار بحث حد را با همدیگر مرور کنیم. در واقع در این قسمت یاد می‌گیریم که وقتی با یک سؤال حد روبرو می‌شویم، چگونه آن را تحلیل کنیم. قبل از هر چیز به شما عزیزان اطمینان می‌دهیم که انواع مختلف سؤال‌های حد را در درسنامه این فصل پوشش کامل داده‌ایم. از این‌رو بهترین راهکاری که به شما توصیه می‌کنیم این است که برای محاسبه حاصل یک حد، به یاد سؤال مشابه آن در کتاب بیفتید و با استفاده از دستور حل آن، جواب حد موردنظرتان را به‌دست آورید.

و اما با یک سؤال حد چگونه برخورد کنیم؟

با مشاهده یک سؤال حد، قبل از هر کاری نقطه موردنظر (یا عددی نزدیک به آن در حدهای براکتی و قدرمطلق) را در عبارت داده شده جایگذاری کنید. با این کار یکی از دو حالت زیر که در ادامه بیان می‌کنیم، رخ می‌دهد. یا با جایگذاری، درمورد جواب حد می‌توان اظهارنظر کرد، یا به یکی از حالت‌های مبهم می‌رسیم.

در ادامه نحوه برخورد با هر یک از این حالت‌ها را با هم مرور می‌کنیم:

حالت اول: دسته‌ای از حدها که با جایگذاری، می‌توان درمورد جواب آنها اظهارنظر کرد.

در این حدها، با قرار دادن عدد موردنظر در عبارت داده شده، جواب سؤال به‌دست می‌آید. معمولاً با اینگونه از حدها مشکل خاصی نداریم و به سرعت جواب آنها را به‌دست می‌آوریم (تمرین ۲). دو نکته زیر نیز در این حدها به ما کمک می‌کند:

۱- در عبارت‌های کراندار، قاعده « حد صفر ضرب در عبارت کراندار برابر صفر است » می‌تواند کمک کند (تمرین ۸ و ۱۰ را دوباره بررسی کنید).

۲- اگر در حد عبارت شامل جزء صحیح، قدرمطلق و یا تابع چندضابطه‌ای وجود داشته باشد، برای رسیدن به جواب صحیح باید حد چپ و راست را جداگانه بررسی کرد (تمرین‌های ۹، ۱۱ و ۱۳ را دوباره ببینید).

حالت دوم: دسته‌ای از حدود که با جایگذاری به یکی از حالت‌های مبهم می‌رسند (که بیشتر سؤالات حد از این دسته مطرح می‌شوند).

● قبل از هر کار دیگری، بیشتر دقت کنید و از مبهم بودن جواب حد اطمینان حاصل کنید، چرا که بعضی از جواب‌ها شبیه حالت‌های مبهم هستند. به‌طور مثال صفر به توان بی‌نهایت مبهم نبوده و حاصلش برابر صفر است.

بعضی دیگر از حدها که شامل اعداد مطلق هستند نیز جواب دارند، به‌طور مثال حاصل یک مطلق به توان بی‌نهایت برابر یک است (بد نیست یک‌بار دیگر جدول صفحه ۲۳ را مروری کرده و تمرین ۱۴ را نیز دوباره حل کنید).

در این گروه از حدها با جایگذاری عدد موردنظر به یکی از حالت‌های مبهم زیر می‌رسیم:

۱- مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$: ایده اول برای رفع ابهام این دسته از حدها استفاده از قاعده هوییتال است ولی در استفاده از آن زیاده‌روی نکنید. اگر با یک کسر ساده روبرو شدیم استفاده از هوییتال مناسب است ولی اگر عبارت داده شده به‌صورت ضرب چند تابع و یا عبارتی پیچیده باشد، از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم (روابط هم‌ارزی ارائه شده در صفحات ۲۹، ۳۰، ۳۴، ۳۸ و ۳۹ را بخوانید). دوباره تأکید می‌کنیم در استفاده از هوییتال و یا هم‌ارزی



تعصب خاصی نداشته باشید و برای هر دو روش شانس قائل باشید. در ضمن گاهی از اوقات در همسایگی صفر هم‌ارزی‌های عادی نیز جواب نمی‌دهد و مجبور می‌شوید از سری مک‌لورن استفاده کنید (تمرین‌های ۲۴ و ۲۵ را مرور کنید). حتی ممکن است، بعضی مواقع در به‌دست آوردن جواب یک حد از هر دو روش استفاده کنید و در آخر به شما توصیه می‌کنیم در محاسبه حد در بی‌نهایت، قاعده رشد را فراموش نکنید (تمرین ۲۹).

۲- مبهم $\infty - \infty$: در اینگونه از سؤالات اگر عبارت داده شده تفاضل دو کسر باشد، مخرج مشترک می‌گیریم، اگر تفاضل دو رادیکال باشد عبارت را در مزدوج آن ضرب و تقسیم می‌کنیم و اگر هیچکدام از این دو حالت نبود از قاعده رشد استفاده می‌کنیم (تمرین‌های ۳۲، ۳۳، ۳۴ و ۳۹ را دوباره مرور کنید).

۳- مبهم $0 \times \infty$: در این حالت فقط کافی است یکی از دو عامل (یعنی صفر شونده و یا بی‌نهایت شونده) را معکوس کرده و در مخرج عامل دیگر بنویسیم. با این کار به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رسیم. گاهی اوقات نیز با استفاده از هم‌ارزی به این حالات مبهم می‌رسیم (تمرین‌های ۳۸ تا ۴۰ را دوباره حل کنید). حاصل حد پر کاربرد $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x$ که به‌زای $\alpha > 0$ برابر صفر است را به خاطر بسپارید.

۴- مبهم 0° و ∞° : در اینگونه از سؤالات فقط کافی است از رابطه $a^b = e^{b \ln a}$ حد را دوباره بازنویسی کنید، با این کار به یکی از حالت‌های مبهم قبلی می‌رسیم که با استفاده از تکنیک‌های بیان شده، حد را رفع ابهام می‌کنیم (تمرین ۴۲).

۵- مبهم 1^∞ : در این حالت ابتدا هم‌ارزی $f^g \sim e^{g(f-1)}$ را امتحان کنید، بیشتر وقت‌ها به جواب می‌رسیم ولی اگر جملات همدیگر را خنثی کردند، از رابطه کلی $a^b = e^{b \ln a}$ استفاده می‌کنیم (تمرین‌های ۴۳ تا ۴۵).

حالا که یک‌بار دیگر کل این فصل را با هم مرور کردیم، زمان آن فرا رسیده که به سراغ تست‌های انتهایی فصل برویم. اگر درسنامه این فصل را خوب مطالعه کرده باشید، مطمئن هستیم که تست‌های انتهایی فصل و یا هر سؤال دیگر از مبحث حد را به راحتی حل می‌کنید.



تست‌های فصل اول

- ۱- پاسخ عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} \times \frac{x+3}{x+2}$ برابر است با:
- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) وجود ندارد. (مکانیک - آزاد ۸۶)
- ۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟
- (۱) $-\infty$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $+\infty$ (مکانیک - ۸۰)
- ۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x + \pi}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{\pi}$ (۲) π (۳) صفر (۴) موجود نیست. (ژئوفیزیک - آزاد ۸۷)
- ۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x^4| - x^4}{|x| - 1}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (هسته‌ای - آزاد ۸۹)
- ۵- حد عبارت $\frac{\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (کشاوری - ۹۳)
- ۶- حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ برابر است با:
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) -۱ (عمران - آزاد ۸۶)
- ۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 2 - \cos 2x}{x^2 - |x|}$ برابر است با:
- (۱) $2 \sin 2$ (۲) $2 \cos 2$ (۳) $\cos 2$ (۴) $-2 \sin 2$ (مکانیک - آزاد ۸۴)
- ۸- به ازای چه مقادیری از a ، $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^2}{1 + \cos(\frac{\pi x}{a})}$ برابر $\frac{2}{\pi^2}$ است؟
- (۱) $\pm \frac{1}{\pi}$ (۲) ± 1 (۳) $\pm \sqrt{2}$ (۴) ± 3 (آمار - ۸۷)
- ۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{4}$ باشد، b کدام است؟
- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) ۶ (مدیریت و مسابرداری - ۹۲)
- ۱۰- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = \frac{5}{4}$ حاصل ab کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۶ (فیزیک پیشگی - ۸۷)



۱۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + \sqrt{x^2 + 12}}{|x^2 + x - 6|}$ کدام است؟ (آبیاری - ۸۵)

(۱) $0/25$ (۲) $0/3$ (۳) $0/6$ (۴) $0/75$

۱۲- فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$ ، در این صورت مقدار a و b به ترتیب کدام است؟ (مدیریت نساجی - ۹۰)

(۱) $-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

۱۳- مقدار حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^{x^2}} - 1}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x^2}$ کدام است؟ (مواد - ۸۹)

(۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) ∞

۱۴- مقدار حد $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log_2(\ln x)}{x - e}$ کدام است؟ (مکانیک - ۸۵)

(۱) $\frac{1}{4} \log_e^2$ (۲) $\frac{1}{4} \log_e$ (۳) $\frac{1}{e} \log_e^2$ (۴) $\frac{1}{e} \log_e$

۱۵- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^2 \ln(1+x)}$ برابر است با: (ریاضی - آزاد ۸۸)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۶- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \sqrt{x^2 + 8}}{|x - 1|} = 2$ باشد، حد چپ عبارت مفروض در نقطه $x = 1$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - ۸۶)

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{7}{6}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{5}{6}$

۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^x}{\frac{1}{3 + 2^x}}$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۳)

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) 1 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) حد موجود نیست.

۱۸- کدام گزینه پاسخ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$ است؟ (مکانیک - آزاد ۸۷)

(۱) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (۲) $+\infty$ (۳) $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ (۴) $-\frac{3}{\sqrt{2}}$

۱۹- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (ریاضی - آزاد ۸۸)

(۱) e^5 (۲) $e^{\frac{3}{5}}$ (۳) $e^{\frac{5}{3}}$ (۴) e^2