بسم الله الرحمن الرحیم

به‌نام یکتا مهندس هستی...

مقدمه و راهنمای مطالعهٔ این کتاب:

مفاهیم مطرح شده در درس معادلات دیفرانسیل، مفاهیم ساده و شیرینی است ولی به‌دلیل وجود تنوع زیاد معادله‌های دیفرانسیل و عدم ارائه دسته‌بندی صحیح و صریح در مراجع، دانشجویان در حل مسائل این درس دچار مشکل می‌شوند.

در این کتاب تلاش کرده‌ایم تا به بهترین شکل ممکن انواع مختلف معادلات دیفرانسیل را دسته‌بندی کنیم و برای هر کدام از آنها استراتژی حل مربوطه را نیز ارائه کنیم. تجربه نشان داده است که مطالعهٔ درس معادلات دیفرانسیل با این روش، این درس را به عنوان یکی از آسان‌ترین دروس درنظر دانشجویان تبدیل می‌کند.

برای استفادهٔ هر چه بهتر از این کتاب به موارد زیر توجه کنید:

۱ در اولین قدم برای بهتر شدن روند یادگیری شما عزیزان، هر فصل را به چند قسمت کوچکتر تقسیم کرده‌ایم تا هم تفکیک مطالب در ذهن شما بهتر انجام شود و هم از مطالعهٔ یک فصل طولانی خسته نشوید. همچنین می‌توانید در هر بار مطالعه، یک قسمت از هر فصل را به‌خوبی بخوانید.

۲ برای چیدمان تمرین‌ها ساعت‌ها فکر کرده‌ایم و تمرین‌ها را با یک روند آموزشی بسیار منظم آورده‌ایم. همچنین در لابه‌لای تمرین‌ها مطالبی از قبیل کمی خلاقیت، کمی دقت و ... گنجانده‌ایم تا شما را به این درس علاقه‌مندتر کنیم.

۳ در دومین قدم بعد از مطالعهٔ دقیق درسنامه‌های هر فصل، بخشی تحت عنوان افزایش مهارت و تسلط بیشتر را در کتاب قرار دادیم که با مطالعهٔ دقیق آن به جرأت می‌توان گفت هیچ تستی باقی نمی‌ماند که ایدهٔ اصلی آن برای شما آشنا نباشد. حل سؤالات این قسمت تنها به دانشجویانی که تسلط بالایی بر مطالب قسمت اول داشته و زمان کافی نیز دارند، توصیه می‌شود.

۴ در قدم بعد بخش جذاب جمع‌بندی و توصیه‌نامه را در کتاب قرار داده‌ایم تا بعد از مطالعهٔ کامل هر فصل، یک‌بار دیگر نکات مهم و کاربردی آن را با هم مرور کنیم.

۵ اگــر مــوارد فوق را به‌خوبی انجام داده باشــید، قادر خواهید بود که تســت‌های انتهــای هــر فصل را خودتــان حل کنید. همچنیــن پس از تولید و چــاپ ریاضیات عمومــی (۱) و نظــرات ســازندهٔ دانشــجویان محتــرم، متقاعد شــدیم به‌جای حل تشریحی، راهنمایی‌های خوبی را برای حل این سؤالات ارائه کنیم (پاسخ تشریحی کامل‌تر را می‌توانید در سایت www.serieomomi.ir مشاهده کنید).

۶ هدفمان این اســت که با ارائهٔ برنامهٔ هفتگی مطالعهٔ کتاب، پرســش و پاســخ و همچنیــن گرفتن آزمون ماهانه در ســایت www.serieomomi.ir به نوعی بزرگترین کلاس درس ریاضی را تشکیل داده و تا رسیدن به سطح عالی با شما همراه باشیم.

در آخر از دوســت ارجمند، دکتر محمد آهنگر کــه در لحظه لحظهٔ تألیف این کتاب ما را یاری کرده و از نظرات ارزشمندشــان بهره بردیم، تشکر می‌کنیم. لازم است از جناب آقای دکتر شریفیان مدیریت محترم مؤسسه، که تمام امکانات لازم جهت هر چه بهتر انجام شدن این پروژه را در اختیار ما گذاشته‌اند و همچنین ویراستار این اثر، ســرکار خانم مهندس الهام طاهرشمس و عوامل اجرایی مؤسسه جناب آقای فرزانه و ســرکار خانم نجفی نهایت تشــکر و قدردانی را داشــته باشــیم.

علیرغم تلاش‌های فراوانی که برای بازبینی این کتاب شــده اســت، وجود اشکال در آن ممکن بوده و از اساتید گرانقدر و دانشجویان عزیز تقاضا می‌شود، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق سایت www.serieomomi.ir مطرح نمائید.

محمد صادق معتقدی - مسعود مهدیان - مجید فرقانی

فهرست

پیش فصل

مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل

فصل اول

معادلات مرتبه اول

فصل دوم

معادلات مرتبه دوم و بالاتر

فصل سوم

حل معادله به کمک سری‌ها

فصل چهارم

تبدیل لاپلاس

فصل پنجم

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی

پیوست

A-۱- مروری بر تاریخچهٔ علم معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل شاخه‌ای از ریاضیات است که بدون اغراق می‌توان آن را یک ابزار بسیار مهم در روند پیشرفت بسیاری از علوم، از جمله علوم مهندسی دانست. اگر مروری گذرا بر تاریخچهٔ علم ریاضیات داشته باشیم، می‌توان گفت که معادلات دیفرانسیل با مفاهیم ساده‌ای نظیر نوشتن معادلهٔ $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^{2}$ در قرن هفدهم توسط لایب‌نیتز آغاز شد. ابداع نمادگذاری‌هایی چون $\frac{dy}{dx}$ برای مشتق، دسته‌بندی و حل چندین نوع از معادلات مرتبه اول[1] نیز از اقدامات مهم این ریاضیدان بزرگ بود. در همان زمان، نیوتن نیز به ارائه راه‌حل‌هایی برای معادلاتی نظیر $\frac{dy}{dx}=f(x)$ یا $\frac{dy}{dx}=f(y)$ پرداخت و ابتکارات جالبی را برای آنها ارائه کرد. شاید بتوان نیوتن و لایب‌نیتز را پدیدآورندگان اصلی علم معادلات دیفرانسیل در ریاضیات دانست. از دیگر افراد مؤثر در علم معادلات دیفرانسیل، می‌توان به برادران برنولی (لوک و یوهان) و همچنین پسر یوهان (دانیل) اشاره کرد. می‌توان گفت مکاتبات برنولی‌ها با لایب‌نیتز منجر به پیشرفت‌های به‌سزایی در دسته‌بندی و حل معادلات مرتبهٔ اول شد. شناخت، دسته‌بندی و ارائه راه‌حل برای معادلات مرتبهٔ اول در قرن هفدهم تقریباً کامل شد و پس از آن، ریاضی‌دانانی چون ریکاتی بیشتر به حل معادلات مرتبهٔ بالاتر پرداختند. در قرن هجدهم دانشمند معروف لئونارد اویلر مسائل متنوعی از مکانیک را به‌صورت معادلات دیفرانسیل درآورد و به بررسی آنها پرداخت و ایده‌های جدیدی را برای حل آنها مطرح کرد. در اواخر قرن هجدهم و اوایل قرن نوزدهم، ریاضی‌دان‌هایی مانند لاگرانژ و لاپلاس تحقیقات گسترده‌ای دربارهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی انجام دادند و همچنین شیوه‌های حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی[2] را نیز برای اولین بار مورد بررسی قرار دادند. با توجه به این تاریخچهٔ نسبتاً کوتاه، می‌توان فهمید که معادلات دیفرانسیل بیش از سیصد سال عمر دارد و ریاضی‌دان‌های برجسته‌ای در راه پیشرفت این علم تلاش کرده‌اند.

درادامه با تعاریف اولیهٔ مربوط به یک معادلهٔ دیفرانسیل آشنا می‌شویم.

۱- با مفاهیمی مانند معادلات مرتبهٔ اول، معادلات مرتبهٔ دوم و ... در ادامهٔ بحث آشنا می‌شویم.

۲- در این درس ما فقط به دسته‌بندی و ارائه روش‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی می‌پردازیم و حل معادلات با مشتقات جزئی، در درس ریاضیات مهندسی مطرح می‌شود.

A-۲- تعاریف مقدماتی

بعد از آشنایی با تاریخچهٔ معادلات دیفرانسیل، در این قسمت می‌خواهیم شما عزیزان را با تعاریف اولیهٔ این موضوع آشنا کنیم.

۱) **معادلهٔ دیفرانسیل معمولی:** دو رابطهٔ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y+x=0$ و $xy'''+2xy'+y\sin x=0$ را درنظر بگیرید. این دو رابطه درواقع نمایندهٔ دو رابطه‌ای هستند که در آنها تابع y، متغیر x و مشتقات y نسبت به x ظاهر شده‌اند و به آنها **معادلهٔ دیفرانسیل معمولی** می‌گوییم. می‌توان گفت هرگونه رابطهٔ بین یک تابع تک متغیره (مانند y)، متغیر مستقل آن (مانند x) و مشتقات آن تابع نسبت به متغیر مستقلش (مانند $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d^2y}{dx^2}$ و ...) یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی نام دارد.

مثال: فرض کنید y تابعی از x است. در این‌صورت معادلات مقابل همگی معادلهٔ دیفرانسیل معمولی هستند.

۱) $yy'-2y''+(y''')^4=x\sin^2 x$
۲) $3y'''-2y''+y=e^x$
۳) $x^2y''-y=x^3$
۴) $\frac{y''}{y'+y}-2xy'+y^{(4)}=0$

سؤال: با کمی دقت بگویید که آیا رابطهٔ $x^2dy-(\sin y)dx+e^{xy}dx=0$ را می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل در نظر گرفت؟

پاسخ: احتمالاً شما هم متوجه شده‌اید که اگر طرفین معادله را بر dx تقسیم کنیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم که ارتباطی بین x، y و $\frac{dy}{dx}$ است. بنابراین معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی است.

$$x^2dy-(\sin y)dx+e^{xy}dx=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } dx} x^2\frac{dy}{dx}-\sin y+e^{xy}=0$$

سؤال: اگر u تابعی از متغیرهای x و y باشد (یعنی $u=f(x,y)$)، آیا رابطهٔ $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=x^2y$ را می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی نامید؟

پاسخ: با توجه به اینکه u یک تابع تک متغیره نمی‌باشد، نمی‌توان این رابطه را یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی نامید. اینگونه از معادلات که ارتباط بین یک تابع چند متغیره، مشتقات آن تابع و متغیرهای آن تابع را نشان می‌دهد، **معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی** می‌نامند.

کمی توجه

در اولین تقسیم‌بندی معادلات دیفرانسیل، آنها را به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌کنند. اگر تابع موردنظر یک متغیره باشد، معادلهٔ دیفرانسیل موردنظر را یک **معادلهٔ دیفرانسیل معمولی** می‌نامند (مثال: $yy'+xy=0$) و اگر تابع موردنظر چند متغیره (۲ متغیره یا بیشتر) باشد، معادلهٔ موردنظر را یک **معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی** می‌نامند (مثال: $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+xy=0$).

شایان ذکر است که در این کتاب، فقط در مورد معادلات دیفرانسیل معمولی بحث می‌کنیم و هرجا کلمهٔ معادله دیفرانسیل و یا حتی گاهی معادله استفاده کردیم، منظورمان همان معادلهٔ دیفرانسیل معمولی است.

۲ **مرتبهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل:** بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود در یک معادلـه را **مرتبهٔ آن معادلــه** مـی‌نامنـد. برای درک بهتر به جدول زیر توجه کنید:

	معادلهٔ دیفرانسیل	بالاترین مرتبهٔ مشتق	مرتبهٔ معادله
۱	$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+۵\frac{dy}{dx}-۴y=e^{x}$	$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$	مرتبهٔ ۲
۲	$y^{(۳)}+۲y''=x^{۲}y^{۵}$	$y^{(۳)}$	مرتبهٔ ۳
۳	$y''(\cos x)+y^{(۴)}(\sin x)=۲$	$y^{(۴)}$	مرتبهٔ ۴
۴	$y'y+۲y^{۳}\sin x=\cos x$	y'	مرتبهٔ ۱

دقت: در معادلهٔ (۲)، منظور از $y^{(۳)}$ مشتق سوم تابع y است و به‌همین ترتیب در معادلهٔ (۳)، منظـور از $y^{(۴)}$ مشتق چهارم y است، در حالیکه در معادلهٔ (۴) منظور از $y^{۳}$ تابع y به توان ۳ است.

یک موضوع کاربردی

همانطور که مشاهده کردید معادلاتی که در آنها فقط مشتق اول تابع حضور دارد، معادلات دیفرانسیل مرتبـهٔ اول نام دارند. چند نمونه از این معادلات به‌صورت زیر است:

$$۲xy'+x^{۲}y=۰\ ,\ x^{۲}y'+x\sin y=\sin x\ ,\ yy'-x\sin y=e^{y}$$

نکته: همانطور که قبلاً نیز گفتیم، معادلاتی با فرم دیفرانسـیلی $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=۰$ را نیـز می‌توان به شکل معادلات مرتبهٔ اول بازنویسی کرد.

به‌طور مثال : $(y-x)\,dx+۴x\,dy=۰\xrightarrow{\div dx}(y-x)+۴x\frac{dy}{dx}=۰\xrightarrow{\frac{dy}{dx}=y'}y-x+۴xy'=۰$

به‌طور کلی در این کتاب، معادلات دیفرانسیل به دو دستهٔ معادلات مرتبهٔ اول و معادلات مراتب بالاتر (مرتبـهٔ دو و بالاتر) تقسیم و در دو فصل جداگانه (فصل‌های یک و دو) بحث و بررسی می‌شوند.

۳ **معادلات خطی و غیرخطی:** اگر در یک معادلـهٔ دیفرانـسیل هـیچ عبـارت غیرخطـی از تـابع و مـشتقات آن موجود نباشد، معادله را **خطی** می‌نامیم و از سوی دیگر هر معادله دیفرانسیلی که خطی نباشد را **غیرخطـی** می‌گوییم. برای درک بهتر این موضوع به نکات زیر توجه کنید:

۱- وجود عبارت‌هایی مانند $y^{۲}$، $\sin y$، yy'، $y'^{۳}$، $y'y''$ و ... یک معادلهٔ دیفرانـسیل را از حالـت خطـی خـارج می‌کند. با توجه به این موضوع معادلات زیر همگی غیرخطی هستند:

$$\underbrace{\boxed{(۱-y)y'}}_{\text{عامل غیر خطی}}+۲y=e^{x}\ ,\ \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+\underbrace{\boxed{\sin y}}_{\text{عامل غیرخطی}}=۰\ ,\ \frac{d^{۴}y}{dx^{۴}}+\underbrace{\boxed{y^{۲}}}_{\text{عامل غیرخطی}}=۰$$

(تابع $\sin y$، یک تابع غیرخطی است)

عامل غیرخطی (اگر توان y و یا مشتقات آن از یک بیشتر باشد، عامل غیرخطی محسوب می‌شوند.)

۲- یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n را می‌توان به فرم کلی زیر بازنویسی کرد:

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)}+a_{n-۱}(x)y^{(n-۱)}+\cdots+a_۱(x)y'+a_۰(x)y=f(x)}$$

با توجه به این موضوع، معادلات زیر همگی خطی هستند:

$$\underbrace{y''-2y'+y=0}_{\text{معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم}} \quad , \quad \underbrace{\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{dy}{dx}-5y=0}_{\text{معادلهٔ خطی مرتبهٔ سوم}}$$

۳- وجود عباراتی مانند $(\sin x)\,y'$، e^x و ... کـه در آنها متغیـر x از حالت خطـی خـارج شـده اسـت، باعـث غیرخطی شدن معادلهٔ دیفرانسیل نمی‌شود. با توجه به این موضوع معادلات دیفرانسیل زیـر خطـی محسـوب می‌شوند:

$$(\sin^2 x)\,y'+(\cos^2 x)\,y+e^x=0 \quad , \quad x^2y''+2xy'-2y=\ln x$$

۴- معادلهٔ دیفرانسیل $(y-x)\,dx+3x\,dy=0$، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی است، زیرا مشابه با آنچه کـه در قبل نیز دیدیم، می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } dx} (y-x)+3x\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 3x\frac{dy}{dx}+y-x=0$$

۴ **درجهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل:** اگر یک معادلهٔ دیفرانسیل نـسبت بـه مـشتق بـا بزرگتـرین مرتبـه را بتـوان به‌صورت یک چندجمله‌ای نوشت، آنگاه تـوان بـالاترین مرتبـهٔ مـشتق موجـود در معادلـه را درجـهٔ معادلـهٔ دیفرانسیل می‌نامند. به‌طور مثال به معادلات زیر توجه کنید:

۱) $(y'')^2+2(y''')^3+y=x$

$$\xrightarrow{\text{شکل چندجمله‌ای}} \underbrace{2(y''')^{\overset{\text{درجهٔ معادله}}{\boxed{3}}}+(y'')^2+y=x}_{\text{نوشتن معادله از مشتقات بزرگ به کوچک}} \Rightarrow$$ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ ۳ و از درجهٔ ۳

۲) $\sin x\,(y'')+x\,(y')^4+2y^{(5)}=e^x$

$$\xrightarrow{\text{شکل چندجمله‌ای}} \underbrace{2(y^{(5)})^{\overset{\text{درجهٔ معادله}}{\boxed{1}}}+\sin x\,(y'')+x\,(y')^4=e^x}_{\text{نوشتن معادله از مشتقات بزرگ به کوچک}} \Rightarrow$$ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ ۵ و از درجهٔ ۱

تمرین ۱: **معادلهٔ دیفرانسیل $e^x y'''-y''+x\,(y')^5=\sin x$:**

۱) خطی، مرتبهٔ ۳، درجهٔ ۵ است. ۲) غیرخطی، مرتبهٔ ۳، بدون درجه است.

۳) غیرخطی، مرتبهٔ ۳، درجهٔ ۵ است. ۴) غیرخطی، مرتبهٔ ۳، درجهٔ یک است.

حل: به‌دلیل وجود $(y')^5$، معادله غیرخطی است، از طرفی بالاترین مرتبهٔ مـشتق موجـود در معادلـه، مـشتق از مرتبهٔ ۳ است، پس معادله داده شده از مرتبهٔ ۳ می‌باشد. از طرفی معادلهٔ داده شده به‌صـورت یـک چندجملـه‌ای براساس y''' (بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود) است، پس درجهٔ آن برابر با توان y''' یعنی برابـر یـک مـی‌باشـد. بـا توجه به این توضیحات گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$\underbrace{e^x(y''')^{\overset{\text{درجهٔ معادله}}{\boxed{1}}}-(y'')^1+x\,(y')^5=\sin x}_{\text{نوشتن معادله از مشتقات بزرگ به کوچک}}$$

۵ **معادلهٔ دیفرانسیل همگن:** به معادلات دیفرانسیل زیر توجه کنید:

۱) $y''+2y'+y=\boxed{x^2}$ جمله‌ای که فقط براساس متغیر مستقل است.

۲) $xy''+e^x y'-y \boxed{-\sin x}=0$

۳) $yy''+\cos^2 xy'=0$ جمله‌ای که فقط براساس متغیر مستقل است.

همانطور که مشاهده می‌کنید، در معادلات دیفرانسیل فوق، y تابع و x متغیر مستقل است. در اینگونه معادلات دیفرانسیل هرگاه جمله‌ای که فقط در آن متغیر مستقل حضور دارد (یعنی جمله‌ای به شکل $f(x)$) مشاهده نشود، معادلهٔ دیفرانسیل را **همگن** نامیده و در غیر این‌صورت، **ناهمگن** است. با توجه به این توضیحات معادلات (۱) و (۲) در بالا غیرهمگن بوده و معادلهٔ (۳) همگن است.

تمرین ۲: در معادلهٔ دیفرانسیل $x^n \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y^m=k\sin x$، به ازای مقادیر مختلف پارامترهای m، n و k در مورد خطی بودن و همگن بودن معادله بحث کنید؟

حل: اگر بخواهیم معادله همگن باشد، نباید جمله‌ای که در آن فقط متغیر مستقل (یعنی x) حضور دارد مشاهده شود، با توجه به این موضوع شرط همگن بودن معادله آن است که k صفر شود.

از طرفی مقدار n و k ربطی به خطی بودن معادله ندارد (زیرا خطی بودن به وجود پارامترهای غیرخطی برای y بستگی دارد) و تنها جمله‌ای که می‌تواند معادله را غیرخطی کند، عبارت y^m (y به توان m) است. شرط خطی بودن این معادله آن است که $m=0$ یا $m=1$ شود و به‌ازای سایر مقادیر برای m، معادله غیرخطی است.

A-۳- جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل

یک تابع مانند $y=f(x)$ را جواب معادلهٔ دیفرانسیل می‌نامیم، هرگاه آن تابع در معادله صدق کند. جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل می‌تواند به‌صورت‌های **جواب عمومی**، **جواب خاص** و یا **جواب غیرعادی** باشد، که در ادامه هر یک را جداگانه توضیح می‌دهیم.

توابع $y_1=e^{-x}$، $y_2=e^{2x}$ و یا $y_3=2e^{-x}-e^{2x}$ را درنظر بگیرید. همگی این توابع در معادلهٔ $y''-y'-2y=0$ صدق می‌کنند. برای نشان دادن این موضوع، باید از توابع دو بار مشتق بگیریم و در معادله جایگذاری کنیم. اگر معادله به‌ازای این توابع برقرار شد، می‌توان آنها را جواب معادله دانست و در غیر این‌صورت، جواب معادله نمی‌باشند. به عنوان مثال برای کنترل y_1 و y_2 باید مشتق‌های اول و دوم آنها را به‌دست آورد:

$$\text{کنترل } y_1: \ y_1=e^{-x} \xrightarrow{\text{دو بار مشتق‌گیری}} y_1'=-e^{-x}\ ,\ y_1''=e^{-x}$$

$$\xrightarrow[y''-y'-2y=0]{\text{جایگذاری در معادله}} e^{-x}-(-e^{-x})-2(e^{-x})=e^{-x}+e^{-x}-2e^{-x}=0$$

$\Rightarrow$ $y_1=e^{-x}$ یک جواب معادلهٔ فوق است.

به‌همین ترتیب داریم:

$$\text{کنترل } y_2: \ y_2=e^{2x} \xrightarrow{\text{دو بار مشتق‌گیری}} y_2'=2e^{2x}\ ,\ y_2''=4e^{2x}$$

$$\xrightarrow[y''-y'-2y=0]{\text{جایگذاری در معادله}} 4e^{2x}-(2e^{2x})-2(e^{2x})=4e^{2x}-4e^{2x}=0$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، $y_2=e^{2x}$ نیز یک جواب معادلهٔ فوق است.

کمی تمرین

به‌عنوان تمرین بیشتر، نشان دهید که $y=2e^{-x}-e^{2x}$ نیز یک جواب برای معادله است.

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که به‌ازای هر دو عدد حقیقی c_1 و c_2، تابع $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ یک جواب از معادلهٔ دیفرانسیل $y''-y'-2y=0$ است. به‌چنین جوابی از معادله که شامل پارامترهای ثابت و دربرگیرندهٔ دسته‌ای از جواب‌های معادله است، **جواب عمومی معادله** می‌گویند. همانطور که مشاهده می‌کنید جواب عمومی این معادلهٔ مرتبهٔ ۲، دارای ۲ پارامتر ثابت c_1 و c_2 است. در حالت کلی می‌توان نشان داد که جواب عمومی یک معادله از مرتبهٔ n باید دارای n پارامتر ثابت باشد. حال اگر مقادیر تابع و بعضی از مشتقات آن را در یک یا چند نقطه داشته باشیم (به این مقادیر، **شرایط اولیه** معادله می‌گویند) پارامترهای ثابت به‌دست می‌آیند. با محاسبهٔ پارامترهای ثابت، معادله فقط یک جواب خواهد داشت که آن‌را **جواب خاص معادله** می‌نامیم.

مثال: از بحث بالا می‌دانیم که $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ جواب عمومی معادلهٔ $y''-y'-2y=0$ است. حال اگر شرایط اولیهٔ $y(0)=1$ و $y'(0)=0$ داده شده باشد، جواب خاص آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x}$$

$$\begin{cases}y(0)=1\xrightarrow[x=0\,,\,y=1]{\text{جایگذاری در جواب عمومی}}c_1e^{0}+c_2e^{0}=1\Rightarrow c_1+c_2=1\\ y'(0)=0\xrightarrow[x=0\,,\,y'=0]{\text{جایگذاری در جواب عمومی}}-c_1e^{0}+2c_2e^{0}=0\Rightarrow -c_1+2c_2=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع دو معادله}}3c_2=1\Rightarrow c_2=\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادلهٔ اول}}c_1+\frac{1}{3}=1\Rightarrow c_1=\frac{2}{3}$$

بنابراین جواب خاص معادله که متناظر با شرایط اولیهٔ داده شده باشد، برابر با $y=\frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$ است.

جواب غیرعادی: بعضی از معادلات دیفرانسیل دارای جواب (یا جواب‌هایی) هستند که از جواب عمومی آنها به‌دست نمی‌آیند، ولی در معادله صدق می‌کنند و نمودار آنها بر همهٔ نمودارهای جواب عمومی معادله مماس است. به چنین جوابی، **جواب غیرعادی** معادله می‌گویند.

تمرین ۳: نشان دهید که معادلهٔ غیرخطی $(yy')^2=1-y^2$ دارای جواب‌هایی به فرم $(x-c)^2+y^2=1$ و همچنین جواب‌های $y=\pm1$ است.

حل: برای نشان دادن این موضوع، به روند زیر توجه کنید:

$$(x-c)^2+y^2=1\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x}2(x-c)+2yy'=0\Rightarrow 2yy'=-2(x-c)$$

$$yy'=-(x-c)\xrightarrow{\text{توان ۲}}(yy')^2=(x-c)^2$$

$$\xrightarrow[\Rightarrow (x-c)^2=1-y^2]{\text{فرض: } (x-c)^2+y^2=1}(yy')^2=1-y^2\Rightarrow$$ رابطهٔ داده شده در معادله صدق کرد، پس جواب معادله است.

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که خطوط $y=\pm1$ نیز جواب معادله هستند:

$$y=\pm1\Rightarrow\begin{cases}y'=0\Rightarrow(yy')^2=0\\ y^2=1\Rightarrow 1-y^2=0\end{cases}\Rightarrow(yy')^2=1-y^2\Rightarrow$$ در معادله صدق می‌کنند.

در واقع می‌توان گفت جواب عمومی این معادله (که در آن پارامتری مانند c حضور دارد که با تغییرش جواب معادله عوض می‌شود) دایره‌هایی به مرکز $(c,0)$ و شعاع یک هستند و خطوط $y=\pm 1$ جواب‌هایی از معادله هستند که بر همهٔ نمودارهای جواب عمومی معادله مماس می‌باشند. بنابراین $y=\pm 1$، جواب‌های غیرعادی معادله هستند (دقت کنید که جواب‌های $y=\pm 1$ از روی جواب عمومی به‌دست نمی‌آیند، یعنی به‌ازاء هیچ مقداری برای c، جواب عمومی به شکل $y=\pm 1$ نوشته نمی‌شود).

تذکر: می‌توان نشان داد که تنها معادلات غیرخطی می‌توانند جواب غیرعادی داشته باشند و این موضوع یعنی یک معادلهٔ خطی نمی‌تواند جواب غیرعادی داشته باشد.

تذکر: در فصل دوم، شیوهٔ به‌دست آوردن جواب غیرعادی چند تابع معروف را به شما یاد خواهیم داد.

A-۴- تشکیل یک معادلهٔ دیفرانسیل

در این قسمت می‌خواهیم به شما عزیزان یاد دهیم که چگونه می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با جوابی که در صورت سؤال به شما می‌دهند را به‌دست آورد.

برای این منظور، گام‌های زیر را به‌ترتیب طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا جواب داده شده را درنظر گرفته و به تعداد پارامترهای ثابت موجود در آن، از جواب مشتق می‌گیریم.

گام دوم: به کمک روابط به‌دست آمده از هر بار مشتق‌گیری و جواب عمومی اولیه داده شده، یک دستگاه تشکیل می‌دهیم و تلاش می‌کنیم به کمک روابط موجود در این دستگاه، تمام پارامترهای ثابت را حذف کنیم. در واقع باید به یک معادله برحسب تابع و مشتقات آن برسیم، به‌طوری که هیچ پارامتر ثابتی در آن به چشم نخورد. برای درک بهتر این موضوع به تمرین‌های بعد توجه کنید.

تمرین ۴: معادلهٔ حاصل از حذف پارامتر c در دسته توابع زیر را به‌دست آورید.

۱) $y=cx$ ‌‌ ‌ ‌ ۲) $x^2+y^2=c$

حل: در هر یک از موارد داده شده، مطابق گام‌های بیان شده عمل می کنیم. توجه کنید که چون در جواب‌های داده شده تنها یک ثابت وجود دارد، پس کافی است از هر معادله تنها یک‌بار مشتق بگیریم. همچنین در همهٔ موارد x را متغیر مستقل و y را تابعی از x فرض می‌کنیم:

۱) $y=cx$

گام اول: با توجه به حضور تنها یک پارامتر ثابت در معادله، از جواب داده شده نسبت به x فقط یک‌بار مشتق می‌گیریم:

$$y=cx \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} y'=c$$

گام دوم: دستگاه موردنظر را تشکیل داده و c را حذف می‌کنیم:

معادلهٔ دیفرانسیل موردنظر:

$$\begin{cases} y=cx \\ y'=c \end{cases} \xrightarrow[\text{با تقسیم طرفین}]{c \text{ حذف}} \frac{y}{y'}=\frac{cx}{c} \Rightarrow y=y'x$$

۲) $x^2+y^2=c^2$

گام اول: با توجه به حضور تنها یک پارامتر ثابت در معادله، از رابطهٔ داده شده فقط یک‌بار مشتق می‌گیریم:

$$x^2+y^2=c^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 2x+2yy'=0$$

گام دوم: با توجه به اینکه در معادلهٔ جدید حاصل شده پارامتر ثابتی حضور ندارد، عملاً معادله‌ای که به آن رسیده‌ایم، همان معادلهٔ دیفرانسیل حاکم است و نیازی به تشکیل دستگاه نیست. $2x+2yy'=0$

کمی توجه

می‌دانیم اگر $y=f(x)$ باشد، با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به x عبارت $y'=f'(x)$ به‌دست می‌آید. حال اگر $y^2=f(x)$ باشد، با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به x داریم:

$$y^2=f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} 2yy'=f'(x)$$

تمرین ۵: معادلهٔ دیفرانسیل حاصل از حذف پارامترهای ثابت در دسته منحنی‌های $y=c_1x+\frac{c_2}{x}$ کدام است؟ (ریاضی - ۷۷)

۱) $x^2y''-xy'+y=0$
۲) $x^2y''-y=0$
۳) $x^2y''+xy'+y=0$
۴) $x^2y''+xy'-y=0$

حل: مطابق دستورالعمل بیان شده، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: از آنجاکه دسته منحنی‌های داده شده دارای دو پارامتر ثابت است، دوبار از آن مشتق می‌گیریم:

$$y=c_1x+\frac{c_2}{x} \Rightarrow y'=c_1-\frac{c_2}{x^2} \Rightarrow y''=\frac{2c_2}{x^3}$$

گام دوم: دستگاه زیر را تشکیل داده و تلاش می‌کنیم پارامترهای c_1 و c_2 را در آن حذف کنیم:

$$\begin{cases} (1)\ y=c_1x+\frac{c_2}{x} \\ (2)\ y'=c_1-\frac{c_2}{x^2} \\ (3)\ y''=\frac{2c_2}{x^3} \end{cases}$$

رابطهٔ (۳) $\Rightarrow c_2=\frac{1}{2}x^3y''$ ، جایگذاری c_2 در رابطهٔ (۲) $\Rightarrow c_1=y'+\frac{\boxed{c_2}}{x^2}=y'+\frac{1}{2}xy''$ ($\boxed{c_2} \to \frac{1}{2}x^3y''$)

در ادامه با جایگذاری c_1 و c_2 در رابطهٔ اول داریم:

$$\text{رابطهٔ (۱)}: y=c_1x+\frac{c_2}{x} \xrightarrow{c_1=y'+\frac{1}{2}xy''\ ,\ c_2=\frac{1}{2}x^3y''} y=xy'+\frac{1}{2}x^2y''+\frac{1}{2}x^2y''$$

$$\Rightarrow x^2y''+xy'-y=0 \qquad \text{(گزینهٔ ۴)}$$

کمی توجه

به‌عنوان یک ایدهٔ جالب، در حالت کلی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم متناظر با جواب $y=c_1p(x)+c_2q(x)$ را می‌توان با محاسبهٔ حاصل دترمینان زیر به‌دست آورد:

$$\begin{vmatrix} p(x) & q(x) & y \\ p'(x) & q'(x) & y' \\ p''(x) & q''(x) & y'' \end{vmatrix}=0$$

توجه داشته باشید که می‌توان این نکته را به معادلات مرتبهٔ بالاتر نیز تعمیم داد.

تمرین ۶: معادلهٔ متناظر با جواب $y = ce^{2x}$ را به‌دست آورید.

حل:

روش اول: از آنجاکه در این جواب تنها یک پارامتر ثابت (یعنی c) وجود دارد، یک‌بار از آن مشتق گرفته و ثابت c را بین روابط حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = ce^{2x} \\ y' = 2ce^{2x} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{y}{y'} = \frac{ce^{2x}}{2ce^{2x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = y' \Rightarrow y' - 2y = 0$$

روش دوم: برای یافتن معادلهٔ متناظر با این جواب می‌توان از نکتهٔ قبل استفاده کرد:

$$y = c\underbrace{e^{2x}}_{p(x)} \Rightarrow \begin{vmatrix} p(x) & y \\ p'(x) & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & y \\ 2e^{2x} & y' \end{vmatrix} = e^{2x}y' - 2e^{2x}y = 0 \xrightarrow{\div e^{2x}} y' - 2y = 0$$

تمرین ۷: معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با منحنی $c_1x^2 + c_2y^2 = 1$ را به‌دست آورید.

حل: از آنجاکه در جواب معادله دو پارامتر ثابت c_1 و c_2 وجود دارد، از آن دو بار مشتق می‌گیریم و تلاش می‌کنیم که پارامترهای ثابت را بین روابط حذف کنیم:

$$\begin{cases} \text{یک‌بار مشتق‌گیری} : 2c_1x + 2c_2yy' = 0 \Rightarrow 2c_1x = -2c_2yy' \Rightarrow \dfrac{c_1}{c_2} = -\dfrac{yy'}{x} \\ \text{دو بار مشتق‌گیری} : 2c_1 + 2c_2(y'^2 + yy'') = 0 \Rightarrow \dfrac{c_1}{c_2} = -(y'^2 + yy'') \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'^2 + yy'' = \frac{yy'}{x} \Rightarrow xy'^2 + xyy'' - yy' = 0$$

کمی توجه

برای محاسبهٔ مشتق yy' به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\underbrace{y}_{\text{اولی}}\overbrace{y'}^{\text{دومی}} \xrightarrow{\text{مشتق}} \underbrace{y'}_{\text{مشتق اولی}}\overbrace{y'}^{\text{دومی}} + \underbrace{y}_{\text{اولی}}\overbrace{y''}^{\text{مشتق دومی}} = (y')^2 + yy''$$

تذکر مهم: بعضی از مفاهیم ریاضی عمومی (۱) در درس معادلات دیفرانسیل کاربرد دارد. به‌منظور استفادهٔ ساده‌تر شما عزیزان از کتاب، این مطالب را در فصل پیوست (در انتهای کتاب) آورده‌ایم. اگر این مطالب را فراموش کرده‌اید، به شما توصیه می‌کنیم که ابتدا فصل پیوست را مرور کنید.

A-۱- آشنایی با معادلهٔ تفکیک‌پذیر

اگر در یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، بتوانیم همهٔ عبارت‌های شامل x و dx را در یک طرف معادله نگه داشته و همهٔ عبارت‌های شامل y و dy را به طرف دیگر معادله منتقل کنیم، این معادلهٔ مرتبهٔ اول را **تفکیک‌پذیر** می‌نامیم. فرم کلی این دسته از معادلات به شکل زیر است:

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(x)\ h(y)$$

در ادامه برای درک بهتر شما عزیزان، نمونه‌هایی از این دسته از معادلات را در جدول زیر آورده‌ایم:

مثال‌هایی برای درک بهتر	
توضیحات	**معادلهٔ دیفرانسیل**
معادله را می‌توان به‌صورت $dy = \sin 5x\ dx$ نوشت، پس این معادله تفکیک‌پذیر است.	$\frac{dy}{dx} = \sin 5x$
عبارت‌های شامل x و y به‌صورت زیر از هم جدا می‌شوند: $dx = -e^{3x}\ dy$ $\Rightarrow\ -e^{-3x}\ dx = dy$ بنابراین این معادله تفکیک‌پذیر است.	$dx + e^{3x}\ dy = 0$
با کمی تغییر در این معادله، عبارت‌های شامل x و y از هم جدا می‌شوند: $x \ln x\ dy = -e^{y}\ dx$ $\Rightarrow\ -e^{-y}\ dy = \frac{dx}{x \ln x}$ درنتیجه این معادله تفکیک‌پذیر است.	$x \ln x\ dy + e^{y}\ dx = 0$
با اندکی ساده‌سازی می‌توان نوشت: $\frac{dy}{dx} = e^{3x} \times e^{2y}$ $\Rightarrow\ e^{-2y}\ dy = e^{3x}\ dx$ پس این معادله نیز تفکیک‌پذیر است.	$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

بعد از آشنایی اولیه با شکل کلی این نوع از معادلات، حال می‌خواهیم به بررسی شیوهٔ حل آنها بپردازیم.

استراتژی حل معادله تفکیک‌پذیر

برای به‌دست آوردن جواب این دسته از معادلات، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا مشابه با روندی که در جدول صفحهٔ قبل انجام دادیم، عبارت‌های شامل x و y را از هم جدا کرده، به‌طوری‌که عبارت‌های شامل x و dx در یک طرف معادله و عبارت‌های شامل y و dy در طرف دیگر معادله قرار گیرند. به‌طور مثال:

$$y'=e^x \sec y \xrightarrow{y'=\frac{dy}{dx}} \frac{dy}{dx}=e^x\times\frac{1}{\cos y} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\cos y}}_{h(y)}\, dy=\underbrace{\boxed{e^x}}_{g(x)}\, dx$$

با این کار شکل تفکیک شدهٔ معادله را ایجاد کرده‌ایم.

گام دوم: با انتگرال‌گیری از طرفین این معادله و محاسبهٔ حاصل انتگرال، جواب معادله به‌دست می‌آید. به‌طور مثال، در ادامهٔ حل معادلهٔ فوق داریم:

$$\cos y\, dy=e^x\, dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int \cos y\, dy=\int e^x\, dx \Rightarrow \sin y=e^x+c$$

توجه کنید که پس از انتگرال‌گیری، عدد ثابت c در یک طرف معادله نوشته می‌شود. مقدار این عدد ثابت با استفاده از شرایط اولیه‌ای که در صورت سؤال داده می‌شود، به‌دست می‌آید.

دقت: اصلی‌ترین موضوع در حل این نوع از معادلات، توانایی حل انتگرال‌هایی است که در طرفین آن ایجاد می‌شوند. این انتگرال‌ها معمولاً انتگرال‌های ساده‌ای هستند و با مطالبی که در فصل پیوست به آن اشاره کردیم، به‌سادگی حل می‌شوند.

تمرین ۱: جواب معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $e^x\, dx-y\, dy=0$ و $y(0)=1$ (عمران - آزاد ۸۹)

۲) $\frac{dy}{dx}=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{y}$ با شرط اولیهٔ $x=0$ و $y=1$ (ژئوفیزیک - ۸۵)

۳) $\frac{x^2\, dy-y^2\, dx}{(x+y)^2}=0$

حل:

۱) همانطور که از ظاهر معادلهٔ اول مشخص است، این معادله به سادگی به فرم تفکیک‌پذیر درمی‌آید:

$$e^x\, dx-y\, dy=0 \Rightarrow y\, dy=e^x\, dx$$

در ادامه با انتگرال‌گیری از طرفین رابطهٔ فوق، جواب معادله به‌دست می‌آید:

$$y\, dy=e^x\, dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int y\, dy=\int e^x\, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2}=e^x+c$$

و در نهایت با استفاده از شرط اولیهٔ مسئله، مقدار ثابت c را تعیین می‌کنیم:

$$\text{شرط اولیه}: \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases},\ \frac{y^2}{2}=e^x+c \xrightarrow{x=0\ ,\ y=1} \frac{1^2}{2}=\underbrace{\boxed{e^0}}_{1}+c \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

$$\text{جواب نهایی معادله}: \frac{y^2}{2}=e^x+c \xrightarrow{c=-\frac{1}{2}} \frac{y^2}{2}=e^x-\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} y^2=2e^x-1$$

۲ در این معادلهٔ مرتبهٔ اول نیز، معادله به‌سادگی به فرم تفکیک‌پذیر نوشته می‌شود و داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{y}\Rightarrow y\,dy=x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}}\int y\,dy=\int x\sqrt{1+x^2}\,dx\Rightarrow\frac{y^2}{2}=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

کمی توجه

برای حل انتگرال طرف دوم، کافیست از تغییرمتغیر سادهٔ زیر استفاده کنیم:

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx\ \xrightarrow[du=2x\,dx]{u=1+x^2}\ \frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\times\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+c=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

در ادامه با جایگذاری شرط اولیه، ثابت c به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$y(0)=1\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow\frac{y^2}{2}=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c\ \xrightarrow[y=1]{x=0}\ \frac{1^2}{2}=\frac{1}{3}(1+0^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+c\Rightarrow c=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Rightarrow c=\frac{1}{6}\ \xrightarrow{\text{جواب معادله}}\ \frac{y^2}{2}=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{6}}}_{c}$$

۳ به معادلهٔ جالب داده شده توجه کنید:

$$\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(x+y)^2}=0$$

همانطور که می‌دانیم کسری برابر صفر است که صورت آن برابر صفر باشد، بنابراین بـرای برقـراری رابطـهٔ فـوق، صورت کسر باید برابر صفر شود:

$$\text{صورت کسر}=0\Rightarrow x^2\,dy-y^2\,dx=0\Rightarrow x^2\,dy=y^2\,dx\Rightarrow\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^2}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، رابطه‌ای که به آن رسیدیم، عملاً یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر است و با انتگرال‌گیری از طرفین آن می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^2}\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}}\int\frac{dy}{y^2}=\int\frac{dx}{x^2}\Rightarrow-\frac{1}{y}=-\frac{1}{x}+c$$

$$\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{1}{x}-c\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{1-cx}{x}\Rightarrow y=\frac{x}{1-cx}\quad\text{یا}\quad y=\frac{x}{1+kx}\qquad(\text{ثابت است } k=-c)$$

تمرین ۲: جواب مسئلهٔ $y(0)=1$ و $yy'=(1+y^2)x^2$ کدام است؟ (عمران - ۸۳)

۱) $ye^{-x^3}=1$

۲) $y^2=2e^{\frac{2x^3}{3}}-1$

۳) $y^3=-2e^{-\frac{x^3}{3}}+1$

۴) $x^2y^2=e^{\frac{x^3}{2}}-3$

حل: با سؤال نسبتاً جالبی برخورد کرده‌ایم، در این معادلهٔ مرتبهٔ اول به‌راحتی می‌توان دید که عبارت‌های شامل x و y از هم جدا می‌شوند و عملاً با یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر روبرو هستیم. بنابراین داریم:

$$yy' = (1+y^2)x^2 \Rightarrow \frac{yy'}{1+y^2} = x^2 \xrightarrow{y' = \frac{dy}{dx}} \frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\text{شکل تفکیک شده} \Rightarrow \frac{y}{1+y^2}dy = x^2\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{1+y^2} = \frac{x^3}{3} + c \Rightarrow \frac{1}{2}ln(1+y^2) = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\xrightarrow{\times 2} ln(1+y^2) = \frac{2}{3}x^3 + 2c \xrightarrow{exp} 1+y^2 = e^{(\frac{2}{3}x^3+2c)} = e^{\frac{2}{3}x^3} \times e^{2c} \qquad (I)$$

یادآوری

اگر $ln\,a = b$ باشد، می‌توان گفت $a = e^b$ است: $\quad ln\,a = b \xrightarrow{exp} a = e^b$

در ادامه چون c یک عدد ثابت است، می‌توان نتیجه گرفت که e^{2c} نیز یک عدد ثابت بوده و می‌توان آن‌را با پارامتر ثابت دیگری مانند k نشان داد:

$$(I) \xrightarrow{\text{عدد ثابت}:\ k = e^{2c}} 1+y^2 = ke^{\frac{2}{3}x^3} \Rightarrow y^2 = ke^{\frac{2}{3}x^3} - 1$$

$$\text{اعمال شرط اولیه و محاسبهٔ } k \xrightarrow[x=0\,,\,y=1]{y(0)=1} 1^2 = ke^{\frac{2}{3}(0)^3} - 1 \Rightarrow 1 = k - 1 \Rightarrow k = 2$$

درنهایت با جایگذاری $k = 2$، جواب معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y^2 = 2e^{\frac{2}{3}x^3} - 1 \qquad \text{(گزینهٔ ۲)}$$

تمرین ۳: جواب معادلهٔ $y' = \dfrac{y - x^2y}{x - xy^2}$، کدام است؟ (مواد – ۹۲)

۱) $y = \sqrt{\frac{1}{2}ln\,y + \frac{1}{2}x^2 + c}$

۲) $y = \sqrt{\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c}$

۳) $ln|\frac{y}{x}| = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c$

۴) $ln\,y = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^3 + c$

حل: با کمی دقت مشاهده می‌شود که برای محاسبهٔ جواب معادلهٔ فوق، عبارت‌های شامل x و y در این معادلهٔ مرتبهٔ اول، از هم جدا می‌شوند و عملاً با یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر روبرو هستیم:

$$y' = \frac{y - x^2y}{x - xy^2} = \frac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)} \xrightarrow{y' = \frac{dy}{dx}} \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)}$$

$$\text{شکل تفکیک شده} \Rightarrow \frac{(1-y^2)}{y}dy = \frac{(1-x^2)}{x}dx \Rightarrow (\frac{1}{y} - y)\,dy = (\frac{1}{x} - x)\,dx \qquad (I)$$

در ادامه با انتگرال‌گیری از طرفین رابطهٔ فوق، به‌سادگی جواب معادله به‌دست می‌آید:

$$(I) \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int (\frac{1}{y} - y)\,dy = \int (\frac{1}{x} - x)\,dx \Rightarrow ln|y| - \frac{y^2}{2} = ln|x| - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow ln|y| - ln|x| = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow ln|\frac{y}{x}| = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c \qquad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

توصیه‌نامه

معادلات مرتبهٔ اول

در این قسمت می‌خواهیم یک‌بار دیگر نکات مهم و پر تکرار این فصل را با هم مرور کنیم، به‌طوری‌که با مطالعهٔ این چند صفحه قادر خواهید شد هنگام روبه‌رو شدن با معادلات مرتبهٔ اول، ابتدا نوع آن را تشخیص داده و سپس روش مناسب حل را برای آن بیابید. برای این منظور ابتدا انواع مختلف معادلات مرتبهٔ اول را به همراه روش حل آنها به‌طور خلاصه بیان کرده و در ادامه به شما عزیزان یاد می‌دهیم که چگونه می‌توان از یک معادلهٔ مرتبهٔ اول نوع آن را تشخیص داد.

۱ **معادلهٔ تفکیک‌پذیر:** هرگاه بتوان یک معادلهٔ دیفرانسیل را به‌گونه‌ای بازنویسی کرد که تمام عبارت‌های شامل x در یک‌طرف معادله و تمام عبارت‌های شامل y در طرف دیگر معادله باشند (یعنی به‌صورت $f(x)\,dx = f(y)\,dy$) معادله را تفکیک‌پذیر می‌نامند (تمرین‌های ۱ تا ۵).

توجه داشته باشید که هر معادله به‌فرم کلی $y' = f(ax+by+c)$ را می‌توان با تغییرمتغیر $u = ax+by+c$ به یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر تبدیل کرد (تمرین‌های ۶ تا ۸).

استراتژی حل: با انتگرال‌گیری از طرفین یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر، جواب معادله به‌دست می‌آید.

۲ **معادلهٔ همگن:** اگر تابع $f(x,y)$ همگن (همگن از مرتبهٔ صفر) باشد، معادلهٔ دیفرانسیل به‌فرم کلی $y' = f(x,y)$ را معادلهٔ همگن می‌نامند. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ نیز به‌شرط آنکه توابع M و N هر دو همگن از مرتبهٔ یکسان باشند، همگن است.

یادآوری: تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ را همگن از مرتبهٔ n گوییم، هرگاه $f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

استراتژی حل: یک معادلهٔ همگن با تغییرمتغیر $u = \dfrac{y}{x}$ (و درنتیجه $y = xu$ و $y' = u + xu'$) به یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود (تمرین‌های ۹ و ۱۰).

دقت: معادلاتی که در آنها y' به‌صورت تابعی از $\dfrac{y}{x}$ یا $\dfrac{x}{y}$ به‌دست می‌آید، همگن هستند (تمرین‌های ۱۱ و ۱۲).

همانطورکه در درسنامه بیان کردیم، هر معادله به‌صورت $y' = f\left(\dfrac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right)$ را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

الف) اگر $ad = bc$: معادله با تغییرمتغیر $u = ax+by$ به یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود.

ب) اگر $ad \neq bc$: معادله با تغییرمتغیرهای $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$ به معادله همگن $Y' = f\left(\dfrac{aX+bY}{cX+dY}\right)$ تبدیل می‌شود که در آن نقطهٔ (x_0, y_0) همان محل برخورد دو خط مقابل است: $\begin{cases} ax+by+e=0 \\ cx+dy+f=0 \end{cases}$

(تمرین‌های ۷۹ و ۸۰)

۳ **معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی:** هر معادلهٔ دیفرانسیل را که بتوان به‌صورت $y' + p(x)\,y = q(x)$ بازنویسی کرد، یک معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی است.

استراتژی حل: ابتدا عامل انتگرال‌ساز معادله را از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$M(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

و در ادامه با تشکیل رابطهٔ زیر و انتگرال‌گیری از طرفین آن جواب معادله به‌دست می‌آید:

$$(M(x)\,y)' = M(x)\,q(x)$$

دقت: توجه کنید که برای حل یک معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی، حتماً باید ضریب y' برابر یک باشد، اگر نبود معادله را بر ضریب y' تقسیم می‌کنیم (تمرین‌های ۱۳ تا ۱۶).

دو ایدهٔ جالب:

ایدهٔ اول: بعضی از معادلات را می‌توان به‌صورت یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول برحسب x مرتب کرد، فرم کلی این دسته از معادلات به‌صورت مقابل است: $x'+p(y)x=q(y)$

که جواب آن‌را مطابق استراتژی حل معادلات مرتبهٔ اول خطی به‌دست می‌آوریم (تمرین‌های ۱۷ و ۱۸).

ایدهٔ دوم: بعضی از معادلات به‌کمک یک تغییرمتغیر به معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول تبدیل می‌شوند (توجه کنید که معادلات برنولی و ریکاتی نیز با تغییرمتغیر مناسب به معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول تبدیل می‌شوند، ولی به‌دلیل اهمیت این معادلات، در دسته‌ای جدا به آنها می‌پردازیم).

فرم کلی معادلات موردنظر به‌صورت $y'h'(y)+p(x)h(y)=q(x)$ است، که برای حل آن از تغییرمتغیر $u=h(y)$ استفاده می‌کنیم و سپس معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی حاصل را حل می‌کنیم.

دقت: برای رسیدن به‌فرم کلی این دسته از معادلات و تشخیص تغییرمتغیر $u=h(y)$ توجه کنید که در سمت راست معادله نباید عبارتی برحسب y موجود باشد (تمرین‌های ۱۹ تا ۲۱).

۴ معادلهٔ برنولی و ریکاتی:

الف) معادلهٔ برنولی: هر معادله به‌فرم کلی $y'+p(x)y=q(x)y^n$ یک معادلهٔ برنولی از مرتبهٔ n است (توجه کنید که ضریب y'، یک است و n می‌تواند کسری یا منفی هم باشد).

استراتژی حل: ابتدا با تغییرمتغیر $u=y^{1-n}$ معادله را به‌صورت معادلهٔ خطی زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{u'}{1-n}+p(x)u=q(x)$$

و در ادامه معادلهٔ خطی به‌دست آمده را حل و درنهایت، در جواب به‌دست آمده به‌جای u، عبارت y^{1-n} را قرار می‌دهیم (تمرین‌های ۲۳ تا ۲۶).

ب) معادلهٔ ریکاتی: یک معادله به فرم کلی $y'+p_1(x)y+p_2(x)y^2+p_3(x)=0$ که در آن p_2 و p_3 ناصفرند را معادلهٔ ریکاتی می‌نامند. برای حل یک معادلهٔ ریکاتی، همواره یک جواب از معادله مانند y_1 لازم است که یا از صورت سؤال و یا با توجه به گزینه‌ها تعیین می‌شود.

استراتژی حل: معادلهٔ ریکاتی را با تغییرمتغیر $y=y_1+\frac{1}{u}$ به یک معادلهٔ خطی تبدیل کرده و آن‌را حل می‌کنیم (تمرین ۲۷).

۵ معادلهٔ کامل:

یک معادله به‌فرم کلی $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ یک معادلهٔ کامل است، به‌شرط آنکه مشتق M نسبت به y برابر مشتق N نسبت به x باشد.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{یا} \quad M_y=N_x$$

استراتژی حل: برای حل یک معادلهٔ کامل از یکی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

N^*: جملاتی از N که x ندارند. ۱) $\int M\,dx+\int N^*dy=c$

M^*: جملاتی از M که y ندارند. ۲) $\int M^*dx+\int N\,dy=c$

بهتر است هر دو رابطه را به‌خاطر داشته باشید زیرا در بعضی مواقع محاسبهٔ انتگرال در یکی بسیار ساده‌تر از دیگری است (تمرین‌های ۲۸ تا ۳۳).

بعضی از معادلاتی که کامل نیستند را می‌توان با ضرب کردن در یک عبارت به یک معادلهٔ کامل تبدیل کرد. به این ضریب، عامل انتگرال‌ساز (یا فاکتور انتگرال) می‌گوییم. محاسبهٔ عامل انتگرال‌ساز یک معادله (غیر کامل) در حالت کلی پیچیده و کم کاربرد است. به‌همین منظور دو حالت خاص که بیشتر در کنکور مورد توجه طراحان بوده است را مرور می‌کنیم:

الف) اگر عبارت $\frac{M_y - N_x}{N}$ فقط تابعی از x باشد، عامل انتگرال‌ساز معادله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

(تمرین‌های ۳۷، ۳۹ و ۴۲)

ب) اگر عبارت $\frac{M_y - N_x}{-M}$ فقط تابعی از y باشد، عامل انتگرال‌ساز معادله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$$

(تمرین‌های ۳۶، ۳۸ و ۴۱)

توجه: در بعضی از سؤالات فرم کلی عامل انتگرال‌ساز یا در صورت سؤال یا در گزینه‌ها بیان می‌شود (مثلاً $x^{\alpha} y^{\beta}$ یا $(x^{2} + y^{2})$). در این موارد می‌توان با ضرب فرم کلی داده شده در معادله و برقراری شرط کامل بودن $(M_y = N_x)$ عامل انتگرال‌ساز را به‌دست آورد (تمرین‌های ۳۴، ۳۵ و ۴۰).

۶ معادلات کلرو و لاگرانژ:

الف) معادلهٔ کلرو: هر معادله به فرم کلی $y = xy' + f(y')$ یک معادلهٔ کلرو است. برای تعیین جواب عمومی آن کافی است در معادلهٔ داده شده به‌جای y'، پارامتر ثابت c را قرار دهیم:

(تمرین‌های ۵۲ تا ۵۴) جواب عمومی : $y = cx + f(c)$

و برای تعیین جواب غیرعادی (ایزوله) معادله، کافیست پوش جواب عمومی معادله را به‌دست آوریم.

ب) معادلهٔ لاگرانژ: هر معادله به‌فرم کلی $y = xg(y') + f(y')$ یک معادلهٔ لاگرانژ است.

استراتژی حل: در معادله به‌جای y'، متغیر z را قرار داده و سپس از رابطهٔ جدید نسبت به x مشتق می‌گیریم و در ادامه تلاش می‌کنیم تا یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول برحسب x را به‌دست آورده و حل کنیم (تمرین‌های ۵۵ و ۵۶).

۷ معادلات مرتبهٔ اول خاص:

الف) حل معادله با ایدهٔ دیفرانسیل کامل: این دسته از معادلات بیشتر از سایر معادلات خاص در کنکور مطرح می‌شوند. کلید اصلی رسیدن به چنین ایدهٔ حلی در یک سؤال دیدن عباراتی مانند $x\,dy \pm y\,dx$ یا $x\,dx \pm y\,dy$ است. توجه کنید که شما عزیزان باید فرم‌های دیفرانسیل کامل شناخته شده مانند $d(xy)$، $d(\frac{x}{y})$، $d(\frac{y}{x})$ و یا $d(\sqrt{x^{2} \pm y^{2}})$ را در ذهن داشته باشید و یا اینکه به‌سرعت بتوانید آنها را محاسبه کنید.

استراتژی حل: با مشاهدهٔ عبارات $x\,dy \pm y\,dx$ یا $x\,dx \pm y\,dy$، تلاش می‌کنیم تا یکی از فرم‌های دیفرانسیل کامل را ایجاد کرده و سپس با انتگرال‌گیری معادله را حل کنیم.

توجه: معمولاً بعد از اینکه مطمئن شدیم که معادلهٔ داده شده، همگن، تفکیک‌پذیر، کامل و یا مرتبهٔ اول خطی نیست، به این ایده فکر می‌کنیم (تمرین‌های ۵۸ تا ۶۰).

ب) معادلهٔ مرتبهٔ اول درجهٔ دوم: هر معادله بـه‌فرم کلـی $a(x,y)y'^2+b(x,y)y'+c(x,y)=0$ یـک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول درجهٔ دوم است.

استراتژی حـل: ابتدا به کمک روش دلتا ($\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$)، y' را برحسب x و y محاسبه کـرده و بـه دو معادلهٔ جدید می‌رسیم (که معمولاً معادلات ساده‌ای هستند) و در ادامه آنها را حـل مـی‌کـنیم و درنهایـت دو جواب به‌دست آمده را در هم ضرب می‌کنیم (تمرین ۵۷).

ج) معادلات صریح برحسب y: هر معادله به‌فرم کلی $y=f(x,y')$ یک معادلهٔ صریح برحسب y اسـت (بـا کمی دقت می‌توان فهمید که معادلات کلرو و لاگرانژ در این دسته قرار می‌گیرند).

استراتژی حل: ابتدا به‌جای y' در معادله، متغیر z قرار داده و یک رابطهٔ جدید به‌دست مـی‌آوریـم. در ادامـه از رابطهٔ جدید نسبت به x مشتق می‌گیریم و تلاش می‌کنیم با حل معادلهٔ جدیـد بـه‌دسـت آمـده، پـارامتر z را حذف می‌کنیم. در حل چنین معادلاتی معمولاً دو جواب حاصل می‌شود. جـوابی کـه شـامل پـارامتر ثابـت c است را جواب عمومی و جواب دیگر را جواب غیرعادی یا ایزوله می‌نامند (تمرین‌های ۶۱ و ۶۲).

د) معادلات صریح بر حسب x: هر معادله که بتوان آن‌را به‌فرم کلی $x=f(y,y')$ بازنویسی کـرد را یـک معادلهٔ صریح برحسب x می‌نامیم.

استراتژی حل: در معادله به‌جای y'، متغیر z را قرار داده و از رابطهٔ به‌دست آمده نسبت به x مشتق می‌گیـریم (دقت کنید که $z=y'$). در ادامه به‌جای dx عبارت معادل آن یعنی $\frac{dy}{z}$ را قرار می‌دهیم و تلاش می‌کنـیم با حل معادلهٔ جدید، متغیر z را حذف کرده و جواب معادله را به‌دست آوریم (تمرین‌های ۶۵ و ۶۶).

هـ) معادلات فاقد y: هر معادله به‌فرم کلی $f(x,y')=0$ را معادلات فاقد y می‌نامند.

استراتژی حل: در چنین معادلاتی (که y نداریم) سه حالت زیر ممکن است رخ دهد:

a) بتوان y' را برحسب x به‌دست آورد:

$$f(x,y')=0 \Rightarrow y'=g(x) \Rightarrow \text{جواب معادله}: y=\int g(x)\,dx$$ (تمرین ۶۳)

b) بتوان x را برحسب y' محاسبه کرد (یعنی $x=h(y')$). در این حالت، به‌جای y' متغیر جدید z را قـرار داده و از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم. در ادامه به‌جای dx، عبارت $\frac{dy}{z}$ را جایگذاری کـرده و تـلاش می‌کنیم معادلهٔ جدید را حل کرده و متغیر z را از جواب‌ها حذف کنیم (تمرین ۶۴).

c) اگر نتوان معادله را به‌صورت $y'=g(x)$ یا $x=h(y')$ بازنویسی کرد. در چنین معادلاتی با انتخاب توابع پارامتری مناسب برای x و y' به‌گونه‌ای که در معادله صدق کند، تلاش می‌کنیم تا حاصل معادله را به‌صورت پارامتری محاسبه کنیم.

و) معادلات فاقد x: هر معادله به‌فرم کلی $f(y,y')=0$ فاقد x است.

استراتژی حل: در چنین معادلاتی نیز سه حالت زیر ممکن است رخ دهد:

a) بتوان معادله را به‌صورت $y'=g(y)$ بازنویسی کرد:

$$y'=g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)}=dx \Rightarrow \text{معادلهٔ تفکیک‌پذیر}$$

b) بتوان معادله را به‌صورت $y=h(y')$ بازنویسی کرد، در این حالت به‌جای y' متغیر z را قرار داده و سپس از رابطهٔ جدید نسبت به x مشتق می‌گیریم. در ادامه با جایگذاری $\frac{dy}{z}$ به‌جای dx در معادلهٔ به‌دست آمده، به یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر می‌رسیم که به‌سادگی قابل حل است (تمرین ۶۷).

c) اگر نتوانستیم معادله را به‌صورت $y'=g(y)$ یا $y=h(y')$ بازنویسی کنیم، باید با انتخاب توابع پارامتری مناسب (به‌گونه‌ای که در معادله صدق کنند)، جواب معادله را به‌صورت پارامتری محاسبه کنیم.

بعد از مرور دوبارهٔ انواع مختلف معادلات مرتبهٔ اول و یادآوری استراتژی حل هر کدام از آنها نوبت به یادآوری سه مفهوم هندسی مسیرهای متعامد، مسیرهای هم‌زاویه و پوش یک دسته منحنی است:

a) مسیرهای متعامد: در بعضی از سؤالات ضابطهٔ یک دسته منحنی را به شما می‌دهند و از شما در مورد خانوادهٔ دسته منحنی‌های متعامد (قائم) آنها سؤال می‌کنند. برای حل چنین سؤالاتی گام‌های زیر را باید طی کنیم:

گام اول: ابتدا از ضابطهٔ داده شده نسبت به x مشتق گرفته و تلاش می‌کنیم به کمک معادلهٔ به‌دست آمده و ضابطهٔ اولیه، پارامتر c را در بین آنها حذف کرده و یک معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست می‌آوریم.

گام دوم: در معادلهٔ دیفرانسیل حاصل، به‌جای y'، عبارت $-\frac{1}{y'}$ را قرار داده و یک معادلهٔ دیفرانسیل جدید به‌دست می‌آوریم.

گام سوم: معادلهٔ جدید را حل می‌کنیم. جواب عمومی آن همان معادلهٔ دسته منحنی‌های قائم موردنظر است (تمرین‌های ۴۳ تا ۴۵).

توجه: اگر معادلهٔ دسته منحنی به‌صورت قطبی بود، مطابق استراتژی بیان شده عمل می‌کنیم فقط در گام دوم به‌جای r'، عبارت $-\frac{r^2}{r'}$ را قرار می‌دهیم (تمرین ۴۶).

b) مسیرهای هم‌زاویه: در چنین سؤالاتی از شما معادلهٔ دسته منحنی را می‌خواهند که با دسته منحنی داده شده در صورت سؤال زاویهٔ θ داشته باشند (مسیرهای قائم حالت خاصی از مسیرهای هم‌زاویه هستند).

استراتژی حل: برای حل چنین مسائلی گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

الف) تشکیل معادلهٔ دیفرانسیل: مشتق‌گیری از رابطه و حذف پارامتر c

ب) نوشتن معادله به‌صورت $y'=h(x,y)$

ج) تشکیل معادلهٔ دیفرانسیل جدید به‌صورت زیر و حل آن:

$$\tan\theta=\frac{h(x,y)-y'}{1+y'h(x,y)}$$

(تمرین‌های ۴۷ و ۴۸)

c) پوش یک دسته منحنی: در بعضی از سؤالات معادلهٔ یک‌دسته منحنی را می‌دهند و سپس پوش آن‌را می‌خواهند. برای حل چنین سؤالاتی گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: از معادلهٔ دسته منحنی داده شده، نسبت به c مشتق می‌گیریم.

گام دوم: پارامتر c را از معادلهٔ داده شده و رابطهٔ به‌دست آمده از مشتق‌گیری حذف می‌کنیم. جواب به‌دست آمده، همان پوش دسته منحنی است (تمرین‌های ۴۹ تا ۵۱).

بعد از مرور دوبارهٔ کل فصل، در این قسمت می‌خواهیم نحوهٔ برخورد و تشخیص نوع یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول را با هم یاد بگیریم:

۱- معمولاً در نگاه اول می‌توان تشخیص داد که معادلهٔ داده شده خطی مرتبهٔ اول یا برنولی است یا خیر. برای این منظور لازم است که فرم کلی این دو معادله را در ذهن داشته باشید:

معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول: $a(x)y'+b(x)y=c(x)$

معادلهٔ برنولی مرتبهٔ n: $a(x)y'+b(x)y=c(x)y^n$

۲- به‌همین ترتیب همگن بودن معادله نیز از ظاهر معادله به‌راحتی قابل تشخیص است:

$$y'=\boxed{f(x,y)} \xrightarrow{\text{اگر } f(x,y) \text{ تابعی همگن باشد}} \text{معادله همگن است}$$

$$\underbrace{\boxed{M(x,y)}\,dx+\boxed{N(x,y)}\,dy=0}_{\text{اگر تمام جملات هر دو هم درجه باشند} \Rightarrow \text{معادله همگن است.}}$$

- هر معادله به فرم $y'=f(\frac{y}{x})$ نیز همگن است.
- هر معادله به فرم کلی $y'=f(\frac{ax+by}{cx+dy})$ نیز همگن است.

۳- اگر ظاهر معادله شبیه به هیچ‌یک از حالت‌های بیان شده نبود، تفکیک‌پذیر بودن معادله را بررسی می‌کنیم. اگر توانستیم عبارت‌های شامل x و y را از هم جدا کنیم، معادله تفکیک‌پذیر است.

- **دقت:** معادلاتی به فرم $y'=f(ax+by+c)$ با تغییرمتغیر $u=ax+by+c$ به معادلهٔ تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شوند.

یادآوری می‌کنیم که معادلات به فرم $y'=f(\frac{ax+by+e}{cx+dx+f})$ نیز قابل تبدیل به معادلات همگن یا تفکیک‌پذیر هستند.

۴- در مرحلهٔ بعد کامل بودن معادله را با محاسبهٔ M_y و N_x بررسی می‌کنیم (توجه کنید که اگر در معادله y' داشتیم، ابتدا باید به‌جای آن $\frac{dy}{dx}$ نوشته و معادله را به فرم $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ بازنویسی کنیم).

اگر معادله کامل هم نبود، بلافاصله M_y-N_x را تشکیل داده و بررسی می‌کنیم که آیا عامل انتگرال‌ساز معادله تابعی از x است یا y و در ادامه با تشکیل عامل انتگرال‌ساز و ضرب آن، معادله را به یک معادلهٔ کامل تبدیل کرده و سپس آن‌را به روش معادلهٔ کامل حل می‌کنیم.

۵- اگر هیچ‌یک از روش‌های فوق به نتیجه نرسید، تلاش می‌کنیم تا با نوشتن معادله براساس x و x' خطی یا برنولی بودن معادله براساس x را امتحان کنیم (کافی است به‌جای y'، $\frac{1}{x'}$ را قرار دهید و سپس معادله را ساده کنید).

۶- اگر معادله براساس x خطی یا برنولی نبود، به احتمال زیاد در معادله می‌توانید عبارت‌هایی مانند $x\,dy \pm y\,dx$ یا $x\,dx \pm y\,dy$ را مشاهده کنید. همانطور که قبلاً هم اشاره شد، این عبارت‌ها نشانه‌ای برای استفاده از ایدهٔ دیفرانسیل کامل هستند.

در چنین حالاتی کافی است که بتوانید عبارت دیفرانسیل کامل را تشکیل دهید و بقیه عبارات را نیز ساده کنید.

۷- اگر با مشاهدهٔ معادله متوجه شدید که معادله x یا y ندارد، می‌توانید از روش‌های حل معادلات فاقد x و یا فاقد y معادله را حل کنید.

توجه: در بسیاری از موارد، گزینه‌ها نیز می‌توانند شما را راهنمایی کنند:

الف) اگر گزینه‌ها براساس $\frac{x}{y}$ یا $\frac{y}{x}$ بودند، معمولاً معادلهٔ داده شده همگن و یا دیفرانسیل کامل است.

ب) اگر گزینه‌ها به‌صورت $f(x, y) = c$ باشند، معمولاً معادلهٔ داده شده یا کامل است و یا با ضرب عامل انتگرال‌ساز کامل می‌شود و یا تفکیک‌پذیر است.

ج) اگر در همهٔ گزینه‌ها عبارت خاصی مانند xy، $\frac{x}{y}$، $\sqrt{x^۲ \pm y^۲}$ و ... وجود داشت، یا باید از ایدهٔ دیفرانسیل کامل استفاده کنید و یا اینکه ابتدا باید یک تغییرمتغیر مناسب را انتخاب کنید.

تست‌های فصل اول

۱- در معادلهٔ دیفرانسیل $y'+8x+1=0$ با شرط اولیه $y(2)=4$ چنانچه $x=3$ باشد، آنگاه y برابر است با: (برق - آزاد ۸۸)

۱) ۱۷ ۲) ۱۷- ۳) ۳۴ ۴) ۳۴-

۲- معادلهٔ $yy'=-2x\sec y$ را حل کنید. (ژئوفیزیک - آزاد ۸۳)

۱) $x^2+y\sin x+\cos x=c$ ۲) $y^2+y\cos y+\cos x=c$

۳) $x^2+y\sin x=c$ ۴) $x^2+y\sin y+\cos y=c$

۳- معادلهٔ دیفرانسیل $y'+2\sin x+1=0$ با شرط $y(0)=2$ مفروض است. مقدار y در $x=\pi$ کدام است؟ (برق - آزاد ۸۶)

۱) $\pi+2$ ۲) $\pi-2$ ۳) $-2-\pi$ ۴) $2-\pi$

۴- معادلهٔ دیفرانسیل $y'=3x^2e^{-y}$ را حل کنید. (ژئوفیزیک - آزاد ۸۶)

۱) $y'=\frac{3x^2}{x^3+c}$ ۲) $y'=\frac{x^2+c}{x^2-c}$ ۳) $y'=\frac{1}{3}(x^3+c)$ ۴) $y'=\frac{x^2-1}{x}+c$

۵- منحنی جواب معادلهٔ دیفرانسیل $(x^2-1)\,dy+2x(y+1)\,dx=0$ دارای چند مجانب است؟ (فلسفه علم - ۸۹)

۱) فقط یک مجانب افقی ۲) دو مجانب قائم

۳) دو مجانب قائم و یک مجانب افقی ۴) دو مجانب افقی و یک مجانب قائم

۶- معادلهٔ $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+x+y+xy}$ را حل کنید. (علوم دریایی - آزاد ۸۵)

۱) $3\sqrt{y+1}=(1+x)^{\frac{3}{2}}+c$ ۲) $\sqrt{y+1}=\frac{1}{3}(1+x)^{\frac{2}{3}}+c$

۳) $3\sqrt{1+x}=(y+1)^{\frac{3}{2}}+c$ ۴) $3(y+1)^2=(x+1)^{\frac{2}{3}}+c$

۷- در حل معادلهٔ دیفرانسیل $y'+2e^x+1=0$ با شرط $y(0)=0$ هنگامی‌که $x=2$ باشد، مقدار y کدام است؟ (برق - آزاد ۸۵)

۱) $2e^2$ ۲) $2e$ ۳) $-2e$ ۴) $-2e^2$

۸- هرگاه $\frac{dy}{dx}=(\frac{y}{x})^{\frac{1}{3}}$، آنگاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (هسته‌ای - آزاد ۸۹)

۱) $y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}=c$ ۲) $\sqrt{y}-\sqrt{x}=c$ ۳) $y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=c$ ۴) $y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=c$

۹- جواب معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\cos(x+y)$ کدام است؟ (فلسفه علم - ۹۰)

۱) $\cot(\frac{x+y}{2})=x+c$ ۲) $\tan\frac{x+y}{2}=x+c$

۳) $x+y+c=2\cot x$ ۴) $x+y+c=2\tan x$

۱۰- جواب مسئلهٔ $(y-x^2y)\,dy+(xy^2+x)\,dx=0$ و $y(0)=-1$ کدام است؟ (هوافضا - ۸۹)

۱) $1+y^2=2(1-x^2)$ ۲) $1+y=2(1-x)$ ۳) $1+x^2=2(1-y^2)$ ۴) $1+x=2(1-y)$