به نام یکتا مهندس هستی

سری عمران

سخن مدیر تألیف

سپاس خداوند متعال را که در این سال‌ها لطف خود را از مؤسسه سری عمران دریغ نکرده و به ما انگیزه‌ای دو چندان داده است تا با **تولید کتاب‌ها و برگزاری کلاس‌های ویژه آزمون نظام مهندسی** و کارشناسی ارشد، قدمی هر چند کوچک برای موفقیت شما مهندسین عزیز بردارد.

پس از ایجاد تغییرات اساسی در آیین‌نامه‌های رسمی کشور (مقررات ملی ساختمان)، تصمیم گرفتیم که با تلاش شبانه‌روزی، فعالیت‌های مؤسسه سری عمران را در زمینه تولید کتاب و برگزاری کلاس‌های آزمون نظام مهندسی ارتقاء دهیم که خلاصه این فعالیت‌ها به شرح زیر است:

کتاب‌های ویژه آزمون نظام مهندسی

با تألیف **نسل جدید** کتاب‌های نظام مهندسی توسط اساتید برجسته و ممتاز، تلاش کرده‌ایم که مجموعه‌ای کم نقص در اختیار شما قرار گیرد. در این کتاب‌ها، ما به‌دنبال ویژگی‌های زیر بوده‌ایم:

۱- با بیانی ساده و روان، کلیه مفاهیم مورد نیاز را آموزش داده و در کنار آن درک و قضاوت مهندسی شما را افزایش دهیم.

۲- با توجه به ابهامات نسبتاً زیاد در آیین‌نامه‌های جدید، با حساسیت خاصی بندهای آیین‌نامه‌ها را شرح داده و سعی کرده‌ایم که کاربرد این بندها، با ارائه مثال‌های متنوع، کاملاً شفاف و واضح شوند.

۳- در یک فرایند سخت و دشوار، تست‌های آزمون سال‌های گذشته (از سال ۸۰ به بعد) را که بر مبنای آیین‌نامه‌های قدیم بوده است، با کمترین تغییر ممکن بر مبنای ویرایش جدید آیین‌نامه‌ها حل کرده و پاسخ تشریحی آنها را نیز با توضیحات کامل آورده‌ایم.

۴- با ارائه فهرست مطالب همراه با جزئیات کامل آن در ابتدای کتاب، عملاً به داوطلبان کمک کرده‌ایم تا در جلسه آزمون، سریعتر مطالب مورد نیاز خود را برای حل سؤالات پیدا کنند. همانطور که می‌دانید این آزمون به‌صورت کتاب باز (open book) برگزار می‌شود و با استفاده از این فهرست، می‌توانید در کوتاهترین زمان ممکن، مطلب مورد نیاز خود در کتاب را پیدا کنید.

کلاس‌های آمادگی آزمون نظام مهندسی

استقبال فراوان و بی‌نظیر مهندسین عزیز از کلاس‌های آمادگی آزمون نظام مهندسی و کارشناسی ارشد مؤسسه سری عمران در سال گذشته و همچنین نتایج درخشان قبولی شرکت‌کنندگان در این کلاس‌ها، باعث شد تا مؤسسه با بازنگری کلی، برنامه‌ریزی دقیق و هدفمندی را جهت برگزاری هر چه بهتر کلاس‌های آمادگی آزمون محاسبات و نظارت انجام دهد. شاخص‌ترین ویژگی این کلاس‌ها به شرح زیر است:

۱- تمامی مطالب مورد نیاز جهت آزمون نظام مهندسی، توسط اساتید برجسته کشور، به‌طور کامل تدریس می‌شوند و شیوه تدریس اساتید به‌گونه‌ای است که شما می‌توانید در کمترین زمان ممکن، به مطالب احاطه پیدا کنید.

۲- با آموزش نکات و مفاهیم تستی برای پاسخ‌دهی سریع به سؤالات، عملاً یک گام جلوتر از سایر داوطلبین هستید.

۳- با حل کلیه تست‌های آزمون‌های نظام‌مهندسی سالیان گذشته و همچنین حل تست‌های تألیفی مکمل، دید بسیار خوبی از نحوه طرح سؤال در آزمون پیدا می‌کنید.

قابل ذکر است که جهت کسب اطلاعات بیشتر از کلاس‌ها و کتاب‌های مؤسسه سری عمران می‌توانید به سایت **www.serieomran.com** مراجعه نمایید.

امید است که تلاش مؤسسه سری عمران مورد قبول مهندسان گرامی قرار گیرد. ارائه پیشنهادهای سازنده شما دوستان و همراهان گرامی، مجموعه را بهتر و پربارتر کرده و ما را که به دنبال کیفیت برتر هستیم یاری می‌کند.

به یادتان هستیم، به یادمان باشید

محمد آهنگر

فهـــــرست

فصـل اول

پایداری و معینی سازه ۷

۱-۱- سازه ۷

۱-۲- شناخت اجزای مختلف سازه و نحوه عملکرد آن‌ها ۷

۱-۳- سازه معین، سازه نامعین ۱۱

۱-۳-۱- تعیین درجه نامعینی در سازه ۱۱

۱-۳-۲- محاسبه درجه نامعینی در خرپا ۱۳

۱-۴- بررسی مفاهیم پایداری و ناپایداری در سازه ۱۴

۱-۴-۱- بررسی الگوهای پایداری در سازه ۱۵

تست‌های فصل اول ۱۷

فصـل دوم

تحلیل سازه‌های معین و رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی این سازه‌ها ۱۹

۲-۱- مقدمه ۱۹

۲-۲- تحلیل تیرهای معین ۱۹

۲-۳- تحلیل قاب‌های معین ۲۲

۲-۴- تحلیل خرپاهای معین ۲۴

۲-۴-۱- روش مفصل ۲۴

۲-۴-۲- روش مقطع ۲۷

۲-۵- تحلیل سازه‌های خاص ۲۸

۲-۵-۱- عضو صفر نیرویی ۲۸

۲-۵-۲- عضو دو نیرویی ۳۰

۲-۵-۳- عضو سه نیرویی ۳۰

۲-۵-۴- سازه‌های قوسی معین ۳۰

۲-۶- نکات مربوط به نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در تیرها ۳۱

۲-۶-۱- رابطه بین بارگذاری و نیروی برشی ۳۱

۲-۶-۲- رابطه بین لنگر خمشی، بارگسترده و نیروی برشی ۳۲

تست‌های فصل دوم ۳۵

فصـل سـوم

خط تأثیر ۵۷

۳-۱- مقدمه ۵۷

۳-۲- روش مولر-برسلاو ۵۸

۳-۳- کاربرد خط تأثیر ۶۱

۳-۴- خط تأثیر در سازه‌های نامعین ۶۳

۳-۵- کاربرد خط تأثیر در سازه‌های نامعین ۶۴

تست‌های فصل سوم ۶۵

فصـل چـهـارم

محاسبه تغییرشکل خمشی در سازه‌های معین ۷۱

۴-۱- مقدمه ۷۱

۴-۲- روش‌های مختلف محاسبه تغییر شکل در سازه‌های معین ۷۱

۴-۲-۱- روش لنگر سطح ۷۱

۴-۲-۲- روش تیر مزدوج ۷۴

۴-۲-۳- روابط تیرهای پایه ۷۷

۴-۲-۳-۱- روابط تیر طره ۷۷

۴-۲-۳-۲- روابط تیر دو سر مفصل ۷۹

۴-۲-۳-۳- روابط تیر لغزنده گیردار ۸۱

۴-۲-۴- روش بار واحد یا کار مجازی ۸۴
۴-۲-۴-۱- نحوه محاسبه $\int \frac{M(x)\, m(x)}{EI} dx$ ۸۴
۴-۲-۴-۲- بررسی اثر سایر نیروهای داخلی در رابطه کار مجازی ۸۹
۴-۲-۴-۳- بارگذاری غیر مستقیم در روش کار مجازی ۹۰
۴-۲-۴-۴- کاربرد روش کار مجازی در خرپا ۹۲
۴-۲-۵- تأثیر بارگذاری غیرمستقیم در سازه‌های معین ۹۵
تست‌های فصل چهارم ۹۶

فصل پنجم

تحلیل سازه‌های نامعین با روش‌های نرمی، سختی، مدلسازی با فنر و تقریبی ۱۱۳
۵-۱- مقدمه ۱۱۳
۵-۲- روش نیرو (نرمی) ۱۱۳
۵-۳- روش تغییر مکان (سختی) ۱۱۹
۵-۴- مفهوم سختی ۱۲۰
۵-۵- کاربرد فنرها در تحلیل سازه ۱۲۲
۵-۵-۱- فنرهای موازی ۱۲۳
۵-۵-۲- فنرهای سری ۱۲۵
۵-۶- تحلیل سازه‌های نامعین به روش تقریبی ۱۲۸
۵-۶-۱- روش پرتال ۱۲۹
۵-۶-۲- روش کانتیلور (طره) ۱۳۱
تست‌های فصل پنجم ۱۳۶

فصل ششم

تحلیل سازه‌های نامعین با روش‌های شیب افت، پخش لنگر و تقارن ۱۵۹
۶-۱- مفهوم درجه آزادی در سازه ۱۵۹
۶-۱-۱- تعیین درجه آزادی دورانی ۱۵۹
۶-۱-۲- تعیین درجه آزادی انتقالی ۱۶۰
۶-۲- روش شیب افت ۱۶۱
۶-۲-۱- فرضیات روش شیب افت ۱۶۱
۶-۲-۲- روابط شیب افت ۱۶۱
۶-۲-۳- بررسی نشست‌ها و دوران تکیه‌گاهی در روش شیب‌افت ۱۶۴
۶-۳- روش پخش لنگر ۱۶۶
۶-۳-۱- تعاریف و اصطلاحات مورد نیاز در روش پخش‌لنگر ۱۶۶
۶-۳-۲- روش پخش لنگر برای سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی ۱۶۸
۶-۴- تقارن در سازه ۱۷۰
۶-۴-۱- سازه متقارن محوری با بارگذاری متقارن ۱۷۰
۶-۴-۲- سازه متقارن محوری با بارگذاری پاد متقارن ۱۷۲
تست‌های فصل ششم ۱۷۴

فصل هفتم

بررسی مفاهیم مهم در مقاومت مصالح ۱۹۷
۷-۱- تنش ۱۹۷
۷-۱-۱- تنش‌های ناشی از نیروی محوری ۱۹۷
۷-۱-۲- تنش‌های خمشی ۱۹۸
۷-۱-۳- تنش‌های برشی ۱۹۹
۷-۱-۳-۱- تنش‌های برشی ناشی از نیروی برشی ۱۹۹
۷-۱-۳-۲- تنش‌های برشی ناشی از لنگر پیچشی ۲۰۰
۷-۲- کرنش ۲۰۱
۷-۲-۱- کرنش‌های محوری ۲۰۱
۷-۲-۱-۱- محاسبه تغییر شکل محوری میله‌ها ۲۰۲
۷-۲-۱-۲- محاسبه تغییر مکان محوری سازه‌های معین ۲۰۳
تست‌های فصل هفتم ۲۰۷

فصل اول: پایداری و معینی سازه

۱-۱- سازه

به مجموعه‌ای از اعضاء متصل به هم (به‌صورت افقی، عمودی، مورب یا خمیده) که وظیفه دریافت، تحمل و انتقال نیروهای وارده به زمین را برعهده دارند سازه گفته می‌شود. به‌طور کلی در یک سازه ابتدا بارهای وارده (مرده، زنده، زلزله، باد، حرارت و ...) توسط تیرها، بادبندها، و ...مهار شده و به‌صورت نیروهای داخلی به اتصالات وارد و به ستون‌ها منتقل می‌شوند، در نهایت ستون‌ها نیز نیروهای خود را به پی و از پی به زمین منتقل می‌کنند. در این میان وظیفهٔ تحلیل سازه‌ها تعیین مقدار نیروهای داخلی، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و میزان تغییر شکل در اعضاء سازه می‌باشد. مراحل تحلیل یک سازه به شرح زیر است که در این درس به آن پرداخته می‌شود:

۱- شناخت اجزای مختلف سازه (تیر، ستون، تکیه‌گاه‌ها، اتصالات و . . .) و نحوهٔ عملکرد آن‌ها

۲- بررسی پایداری و ناپایداری سازه‌ها و تعیین درجهٔ نامعینی آنها

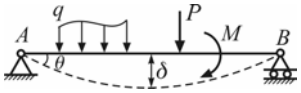
۳- تعیین مقادیر نیروهای داخلی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با استفاده از معادلات تعادل در صفحه

۴- رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در اعضاء سازه

۵- محاسبه تغییر شکل (تغییر مکان و چرخش) در نقاط مختلف سازه

تذکر: در این درس منظور از سازه، سازه‌های دوبعدی مانند قاب‌های ساختمانی بوده و شامل سازه‌های فضایی، سه‌بعدی، قوسی و حجمی نمی‌شود. بنابراین تمام مفاهیم و محاسبات در صفحه (دوبعدی) بیان خواهد شد.

۱-۲- شناخت اجزای مختلف سازه و نحوه عملکرد آن‌ها

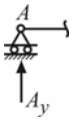


۱- تیر: تیرها از مهمترین اعضاء سازه هستند که وظیفه اصلی آن‌ها تحمل تنش‌های خمشی ناشی از بارگذاری روی آن‌ها می‌باشد. تیر مقابل به تیر دو سر ساده معروف بوده و ازمتداول‌ترین تیرهای موجود در سازه‌ها می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در اثر بارگذاری وارده روی تیر AB تغییر شکل‌های نشان داده شده $(\theta\ ,\ \delta)$ در آن ایجاد می‌شود. در فصل‌های بعدی نحوهٔ محاسبهٔ مقادیر δ و θ را خواهیم آموخت.

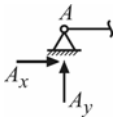
۲- ستون: ستون‌ها یکی دیگر از اعضای اصلی و مهم سازه‌ها هستندکه عمدتاً وظیفهٔ تحمل و انتقال نیروهای فشاری را برعهده دارند. این نیروهای فشاری ناشی از عکس‌العمل تکیه‌گاهی تیرها می‌باشند.

۳- تکیه‌گاه‌ها: وظیفه اصلی تکیه‌گاه‌ها انتقال نیروهای وارده از اعضای سازه به زمین یا عضوهای دیگر می‌باشد. هرتکیه‌گاه در مقابل یک یا چند نیروی وارده از سازه عکس‌العمل نشان می‌دهد که به آن عکس‌العمل تکیه‌گاه می‌گوییم و با R نشان می‌دهیم.

در ادامه انواع تکیه‌گاه‌های رایج در سازه‌ها را معرفی و بررسی می‌کنیم.

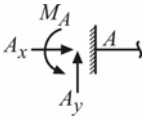


***a)* تکیه‌گاه غلتکی:** این تکیه‌گاه تنها در مقابل حرکت در راستای قائم مقاوم است و حرکت آن در راستای افق و دوران آن آزاد است بنابراین تنها یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی A_y دارد. $(R=1)$



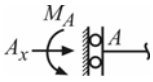
***b)* تکیه‌گاه ساده (مفصلی):** همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، این تکیه‌گاه در مقابل حرکت در راستای قائم و افق ممانعت ایجاد کرده و دو مؤلفه یا عکس‌العمل تکیه‌گاهی A_x , A_y در آن ایجاد شده است.

لازم به ذکر است در این تکیه‌گاه لنگر خمشی صفر بوده و سازه در آن به‌راحتی دوران می‌کند. $(R=2)$



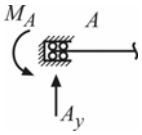
***c)* تکیه‌گاه گیردار:** در این تکیه‌گاه علاوه بر وجود عکس‌العمل‌های افقی A_x و قائم A_y، لنگر خمشی نیز حضور دارد. به‌عبارتی دیگر این تکیه‌گاه در مقابل دوران عضو مقاومت کرده و در آن لنگر خمشی M_A ایجاد می‌شود.

بنابراین این تکیه‌گاه سه عکس‌العمل دارد. $(R=3)$



***d)* تکیه‌گاه لغزنده گیردار:** این تکیه‌گاه مانند تکیه‌گاه گیردار است با این تفاوت که هیچ مؤلفه‌ای برای مقاومت در برابر حرکت در راستای قائم ندارد و به راحتی در این جهت جابه‌جا می‌شود.

بنابراین تنها دارای دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی A_x و M_A است. $(R=2)$

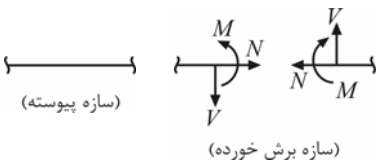


***e)* تکیه‌گاه تلسکوپی:** شکل شماتیک این تکیه‌گاه به‌صورت مقابل بوده و نسبت به بقیه تکیه‌گاه‌ها، کمتر در سازه مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود حرکت در راستای افقی در این تکیه‌گاه به سادگی امکان‌پذیر بوده و مؤلفه‌ای در این راستا وجود ندارد.

بنابراین تکیه‌گاه دو عکس‌العمل A_y , M_A را خواهد داشت. $(R=2)$

نکته: در تکیه‌گاه‌های c و d و e دوران محور عضو صفر است. $(\theta=0)$ با کاربرد این موضوع در فصل‌های بعدی آشنا خواهید شد.

۴- اتصالات (گره‌ها): قبل از بررسی اتصالات، ابتدا مفهوم نیروی داخلی در سازه را بررسی می‌کنیم:



به‌طورکلی در هر ناحیه پیوسته‌ای از سازه، اگر برشی ایجاد کنیم، نیروهای داخلی مطابق شکل مقابل، آزاد خواهند شد. به عبارت دیگر در هر قسمت از سازه سه مؤلفهٔ نیروی محوری (N)، نیروی برشی (V) و لنگر خمشی (M) حضور دارد.

برای محاسبه نیروهای داخلی در سازه‌های معین، کافیست در نقطه مربوطه برشی را ایجاد کنیم، سپس با بررسی معادلات تعادل در صفحه ($\sum M = ۰ , \sum F_y = ۰ , \sum F_x = ۰$) نیروهای داخلی مربوطه به‌دست می‌آیند. این معادلات به معادلات تعادل استاتیکی معروف‌اند که در فصل بعد با نحوه استفاده از آن‌ها آشنا خواهیم شد.

تذکر: در بعضی از نقاط سازه اتصالاتی وجود دارد که پیوستگی سازه را از بین برده و باعث تغییر در ساختار نیروهای داخلی می‌شوند. برخی از اتصالات مهم در سازه‌ها به همراه توضیحات آن در جدول شماره (۱-۱) آورده شده است.

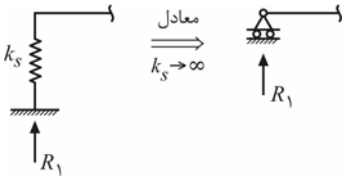
نکته: در هر یک از این اتصالات به تعداد مؤلفه‌های داخلی که صفر هستند، معادلات شرطی (c) خواهیم داشت. با مفهوم و کاربرد معادلات شرطی در قسمت بعد آشنا خواهیم شد.

جدول ۱-۱- انواع اتصالات داخلی سازه

ردیف	نام اتصال	شکل	توضیحات	تعداد معادلات شرطی (c)
۱	مفصل خمشی		در این اتصال لنگر خمشی تحمل نمی‌شود $M = ۰$	$c = ۱$
۲	مفصل برشی		در این اتصال نیروی برشی تحمل نمی‌شود $V = ۰$	$c = ۱$
۳	غلتک داخلی		در این اتصال نیروی محوری و لنگر خمشی تحمل نمی‌شود $M = ۰ , N = ۰$	$c = ۲$
۴	تلسکوپی		در این اتصال نیروی محوری تحمل نمی‌شود $N = ۰$	$c = ۱$
۵	مفصل خمشی - برشی		در این اتصال نیروی برشی و لنگر خمشی تحمل نمی‌شود $M = ۰ , V = ۰$	$c = ۲$

کاربرد فنرها در تحلیل سازه:

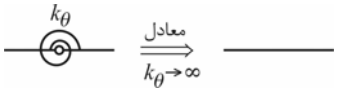
۱- فنر انتقالی: گاهی اوقات در اتصالات، تکیه‌گاه‌ها و همچنین در طول تیر از فنرهای انتقالی استفاده می‌شود. این فنرها نیرو را در راستای خود منتقل می‌کنند و می‌توانیم آن‌ها را با یک میله دو سر مفصل معادل کنیم.

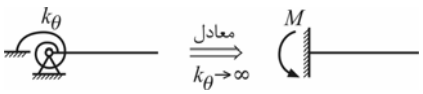


$$\text{فنر } \Delta = \frac{R_۱}{k_S}$$

$$k_S = \frac{EA}{L}$$

۲- فنرهای پیچشی: در فنرهای پیچشی، اگر سختی فنر را به سمت بی‌نهایت میل دهیم، فنر مانند اتصال صلب عمل کرده و لنگر خمشی در آن تحمل می‌شود. بنابراین داریم:





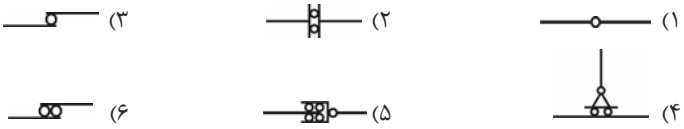
$$\theta = \frac{M}{k_\theta}$$

در واقع وجود فنر پیچشی میزان دوران عضو را در نقطه مورد نظر کاهش می‌دهد.

نکته: برای پیدا کردن پارامتر c از مفهوم بیان شده در جدول شماره (۱-۱) استفاده می‌کنیم. به این ترتیب در یک اتصال تعداد قیدهایی که سازه را از ناپیوستگی خارج و آن را صلب می‌کند، همان c می‌باشد. برای درک بهتر مفهوم فوق به مثال زیر توجه کنید.

تمرین ۱-۱

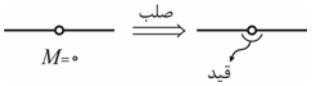
در هر یک از اتصالات نشان داده شده، مقدار پارامتر c را پیدا کنید.



حل: می‌دانیم برای محاسبه پارامتر c باید تعداد قیدهایی که باعث صلب شدن اتصال و در نتیجه تحمل برش، خمش و نیروی محوری می‌شود را شمارش کنیم. بنابراین به بررسی هر یک از موارد فوق می‌پردازیم.

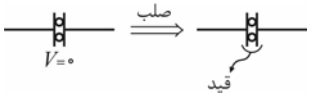
تذکر: منظور از صلب شدن اتصال این است که هیچ یک از نقاط آن نسبت به یکدیگر جابه‌جایی یا دوران نداشته باشند.

۱) در این اتصال با توجه به وجود مفصل خمشی و نکات بیان شده در جدول شماره (۱) لنگر خمشی تحمل نمی‌شود و برای پیوسته و صلب کردن اتصال کافیست قیدی به‌صورت زیر قرار دهیم تا از چرخش دو طرف مفصل نسبت به هم جلوگیری کند.



$$M \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

۲) در این اتصال نیروی برشی تحمل نمی‌شود و دو طرف اتصال به راحتی نسبت به هم جابه‌جا می‌شوند، بنابراین با قرار دادن قید نشان داده شده در شکل از حرکت اتصال در راستای قائم جلوگیری می‌کنیم.



$$c = 1$$

۳) در این اتصال علاوه بر نیروی محوری، لنگر خمشی نیز تحمل نمی‌شود و برای این‌که از دوران و حرکت اتصال در راستای افق جلوگیری کنیم از دو قید استفاده می‌کنیم.

$$c = 2$$

تذکر: منفی بودن θ_A به این معنی است که دوران آن در جهت خلاف مثلثاتی است.

د) با دقت در منحنی الاستیک سازه و تقارن در بارگذاری، خیز حداکثر در نقطه m در وسط تیر اتفاق می‌افتد. با توجه به این موضوع و صفر بودن شیب در این نقطه کافیست از نقطه m خط مماس موازی محور تیر رسم کرده و از نقطه A به آن عمود کنیم.

$$\Delta_{max} = \Delta_m = t_{A/m} = S_{Am} \times x_G = S_{AB} \times x_1 + S_{Bm} \times x_2 =$$
$$(\frac{PL}{EI} \times L \times \frac{1}{2}) \times (\frac{2}{3} L) + (\frac{PL}{2EI} \times \frac{L}{2}) \times (L + \frac{L}{4}) = \frac{31}{48} \frac{PL^3}{EI}$$

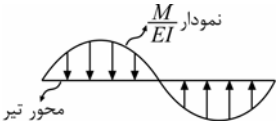
با توجه به مثبت بودن $t_{A/m}$، نقطه A بالای مماس ترسیمی از نقطه m می‌باشد (مطابق شکل).

۴-۲-۲- روش تیر مزدوج

از این روش بیشتر در محاسبهٔ تغییر شکل تیرها استفاده می‌شود و به ندرت در قاب‌ها نیز استفاده می‌شود. همان‌طور که از نام این روش پیداست برای تحلیل یک تیر معین ابتدا مزدوج تیر را به‌دست می‌آوریم و به‌جای تحلیل تیر اولیه، مزدوج آن را تحلیل می‌کنیم. تیر مزدوج ویژگی‌هایی دارد که در زیر بیان شده است.

۱- تیر مزدوج یک تیر، تیری است که طول آن با طول تیر اصلی برابر بوده ولی بارگذاری، تکیه‌گاه‌ها و اتصالات در آن با تیر اصلی متفاوت است.

۲- برای به‌دست آوردن بارگذاری تیر مزدوج، ابتدا نمودار $\frac{M}{EI}$ را برای تیر اصلی تحت بارگذاری واقعی رسم می‌کنیم. سپس بارهای واقعی را از روی تیر برداشته و بارگذاری مجازی را اعمال می‌کنیم. این بارگذاری به‌صورت بارهای گسترده می‌باشد که از منحنی $\frac{M}{EI}$ شروع شده و به محور تیر ختم می‌شوند.



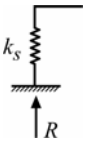
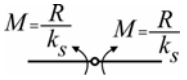
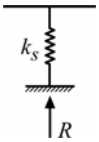
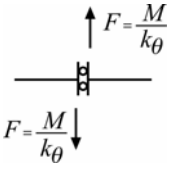
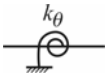
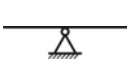
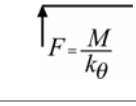
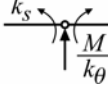
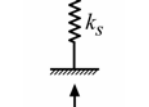
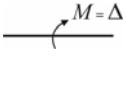
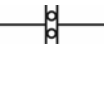
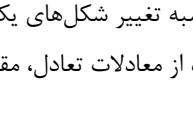
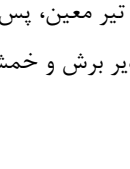
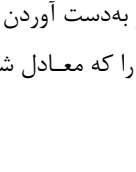
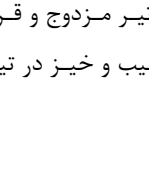
(نحوه بارگذاری)

۳- برای تبدیل تکیه‌گاه‌ها و اتصالات تیر اصلی به تیر مزدوج، باید توجه کنیم این نقاط طوری تبدیل شوند که شیب و خیز در تیر اصلی به‌ترتیب معادل نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر مزدوج باشد. بنابراین اگر در نقطه‌ای از تیر اصلی خیز یا شیب صفر باشد، در تیر مزدوج باید لنگر خمشی یا نیروی برشی صفر شود.

۴- همانند روش لنگر سطح، در قسمتی از تیر که ناحیه صلب وجود دارد ($EI = \infty$) نمودار $\frac{M}{EI}$ معادل صفر می‌باشد و نمودار $\frac{M}{EI}$ را برای آن قسمت رسم نمی‌کنیم. بنابراین در تیر مزدوج نیز قسمت‌های صلب تیر بارگذاری نخواهند داشت.

$$EI = \infty \Rightarrow \frac{M}{EI} = 0$$

۵- با توجه به مطالب بیان شده در بند ۳، مزدوج تکیه‌گاه‌ها و اتصالات مهم به‌صورت زیر می‌باشد:

سازه مزدوج	سازه اصلی	سازه مزدوج	سازه اصلی
			
			
			
			
			
			

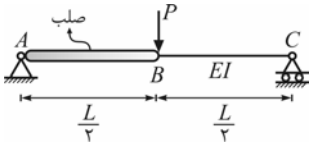
بنابراین برای محاسبه تغییر شکل‌های یک تیر معین، پس از به‌دست آوردن تیر مزدوج و قرار دادن بارگذاری روی آن، با استفاده از معادلات تعادل، مقادیر برش و خمش را که معادل شیب و خیز در تیر اصلی هستند، محاسبه می‌کنیم.

تمرین ٤-٢

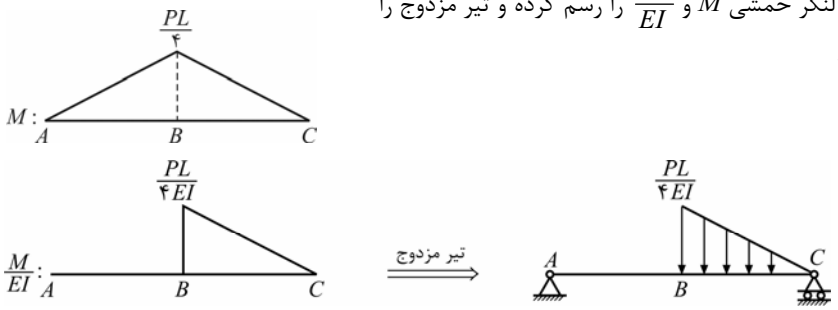
در تیر مقابل قطعهٔ AB صلب است.

الف) مقدار شیب تکیه‌گاه A چقدر است؟

ب) تغییر مکان محل اثر بار P چقدر است؟



حل: ابتدا نمودار لنگر خمشی M و $\frac{M}{EI}$ را رسم کرده و تیر مزدوج را به‌دست می‌آوریم.

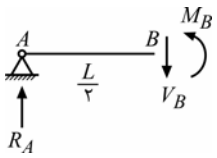


الف) مقدار شیب در تکیه‌گاه A از سازه اصلی با نیروی برشی یا عکس‌العمل این تکیه‌گاه در تیر مزدوج برابر است. بنابراین داریم:

$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow R_A \times L = \frac{PL}{۴EI} \times \frac{L}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{L}{۲} \Rightarrow R_A = \frac{PL^۲}{۴۸EI}$$

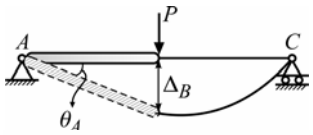
$$\Rightarrow \theta_A = \frac{PL^۲}{۴۸EI} \quad \text{(سازه اصلی)}$$

ب) با توجه به اینکه تغییر مکان در تیر اصلی معادل لنگر در تیر مزدوج است، برای محاسبهٔ تغییر مکان محل اثر بار P ، کافیست لنگر نقطه B در تیر مزدوج را محاسبه کنیم.



$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow M_B = R_A \times \frac{L}{۲} = \frac{PL^۳}{۹۶EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{PL^۳}{۹۶EI}$$

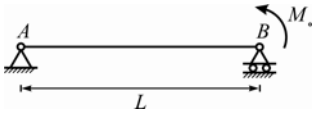
تذکر: تغییر مکان نقطه B را به روش دیگری نیز می‌توان محاسبه کرد. با دانستن مقدار شیب در تکیه‌گاه A و توجه به این موضوع که قسمت AB صلب است، تغییر مکان B عبارتست از:



$$\Delta_B = \theta_A \times \frac{L}{۲} = \frac{PL^۲}{۴۸EI} \times \frac{L}{۲} = \frac{PL^۳}{۹۶EI}$$

تمرین ٤-٣

در تیر سادهٔ AB زیر فاصلهٔ محل خیز ماکزیمم تا نقطهٔ A کدام است؟ (EI ثابت است) **(پایه ۳ - شهریور ۹۱)**

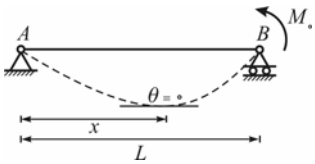


۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}L$

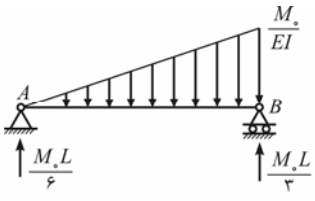
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}L$

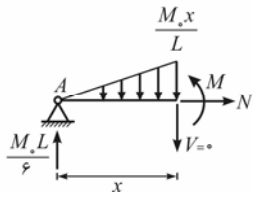
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}L$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}L$



حل: از روش تیر مزدوج استفاده می‌کنیم. با توجه به منحنی تغییر شکل تیر که به‌صورت مقابل است، در نقطه‌ای که خیز بیشترین مقدار را دارد مقدار شیب صفر است. بنابراین ابتدا تیر مزدوج را تشکیل داده و نقطه‌ای از آن که متناظر با برش صفر می‌باشد را پیدا می‌کنیم.





$$\sum F_y = \circ$$
$$\Rightarrow \frac{M_\circ x}{L}\times\frac{x}{۲}=\frac{M_\circ L}{۶}$$
$$\Rightarrow x=\frac{L}{\sqrt{۳}}$$

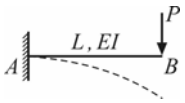
بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۴-۲-۳- روابط تیرهای پایه

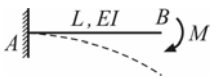
در این روش با استفاده از روابط تیرهای پایه، تغییر شکل نقاطی از سازه را که شبیه این تیرها هستند، به‌دست می‌آوریم. این روش شامل سه تیر طره، دو سر مفصل و لغزنده گیردار می‌باشد. در واقع با دانستن تغییر شکل این تیرها تحت بارگذاری نشان داده شده، تغییر مکان نقطه دلخواه از سازه را محاسبه خواهیم کرد.

۴-۲-۳-۱- روابط تیر طره

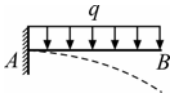
در تیر طره، مقدار خیز و شیب انتهای تیر در سه حالت بارگذاری، به صورت زیر است:



$$\Delta_B=\frac{PL^۳}{۳EI}$$
$$\theta_B=\frac{PL^۲}{۲EI}$$

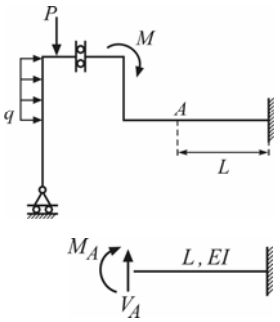


$$\Delta_B=\frac{ML^۲}{۲EI}$$
$$\theta_B=\frac{ML}{EI}$$



$$\Delta_B=\frac{qL^۴}{۸EI}$$
$$\theta_B=\frac{qL^۳}{۶EI}$$

بنابراین برای محاسبه خیز و شیب در هر نقطه‌ای از تیر طره در یک سازه معین، کافیست مقادیر برش و لنگر خمشی در آن نقطه را به‌دست آورده و تغییر شکل را محاسبه کنیم:



در سازهٔ مقابل اگرمقادیر خیز و شیب در نقطهٔ A مد نظر باشد با مقطع زدن در نقطه A خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_A=\dfrac{V_A L^۳}{۳EI}+\dfrac{M_A L^۲}{۲EI} \\ \theta_A=\dfrac{V_A L^۲}{۲EI}+\dfrac{M_A L}{EI} \end{cases}$$

تذکر: دقت داشته باشید این روابط تنها برای تیر طره یا قسمتی از آن برقرار است.

اگر تغییر شکل‌های ناشی از برش و لنگر خمشی در خلاف جهت یکدیگر باشند در روابط بالا از علامت منفی استفاده می‌کنیم.

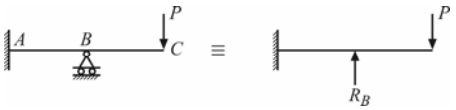
فصل پنجم: تحلیل سازه‌های نامعین با روش‌های نرمی، سختی، مدلسازی با فنر و تقریبی

۵-۱- مقدمه

در فصل اول با سازه‌های معین و نامعین آشنا شده و در فصل دوم نحوه تعیین نیروها و لنگرهای داخلی در سازه‌های معین را آموختیم. می‌دانیم در سازه‌های معین نیروهای داخلی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تنها با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی به‌دست می‌آیند. این در حالی است که در سازه‌های نامعین، به‌دلیل اینکه تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات تعادل است، برای تحلیل سازه نیاز به معادلات کمکی سازگاری داریم. به‌عبارتی برای تحلیل سازه‌های نامعین باید به تعداد درجات نامعینی سازه، معادلات سازگاری را نوشته و سپس سازه را تحلیل کنیم. در این فصل برای تحلیل سازه‌های نامعین از روش‌های نیرو (نرمی)، تغییر مکان (سختی)، مدل‌سازی با فنر و تحلیل تقریبی استفاده می‌کنیم.

۵-۲- روش نیرو (نرمی)

در این روش همان‌طور که از نام آن معلوم است، یکی از نیروهای داخلی یا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را به‌عنوان مجهول اضافی در سازه در نظر می‌گیریم، سپس معادله سازگاری مربوط به آن نیروی داخلی را نوشته و از روش‌هایی که در فصل قبل برای تعیین تغییر شکل در سازه‌های معین آموختیم، استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال سازه شکل زیر را که از یک تیر طره AC و یک تکیه‌گاه غلتکی در B تشکیل شده است در نظر بگیرید، این سازه یک درجه نامعین است؛ حال اگر نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه غلتکی B را به‌عنوان مجهول اضافی در نظر بگیریم، آن‌گاه شرط سازگاری مربوطه $\Delta_B = 0$ خواهد بود. یعنی تغییر مکان قائم B صفر است (با توجه به اینکه این نقطه به زمین متصل شده است) و بنابراین داریم:

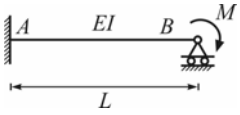


و $\Delta y_B = 0$ (معادله سازگاری)

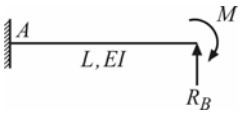
بنابراین برای ارضاء شرط بیان شده در معادله سازگاری در سازه فوق، یکبار تغییر مکان نقطه B را در اثر نیروی P و یکبار در اثر نیروی R_B با استفاده از روش‌های تعیین تغییر مکان در سازه‌های معین محاسبه می‌کنیم. تغییر مکان نقطه B در اثر بار P به سمت پایین و در اثر بار R_B به سمت بالا می‌باشد و با توجه به تکیه‌گاه غلتکی، این دو مقدار باید با هم برابر باشند که در نهایت از حل این معادله مقدار R_B به‌دست می‌آید. بنابراین سازه معین شده و می‌توانیم سایر نیروهای داخلی را با معادلات تعادل محاسبه کنیم.

تمرین ۵-۱

در سازه شکل مقابل مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه B چقدر است؟



حل: سازه داده شده یک درجه نامعین بوده و برای تحلیل آن با روش نیرو، نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه B را به‌عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. در این صورت باید تغییر مکان نقطه B ناشی از لنگر M که به سمت پایین است، با تغییر مکان نقطه B ناشی از عکس‌العمل تکیه‌گاه B که به سمت بالا است، برابر باشد. بنابراین با توجه به روابط تیرهای پایه ارائه شده در فصل قبل، تغییر مکان نقطه B را تحت این دو بارگذاری محاسبه کرده و با یکدیگر برابر قرار می‌دهیم.



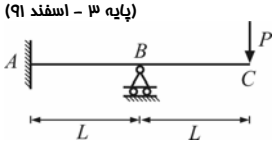
$$\text{تغییر مکان نقطه } B \text{ ناشی از لنگر } M \quad = \frac{ML^2}{2EI} \quad \downarrow$$

$$\text{تغییر مکان نقطه } B \text{ ناشی از بار } R_B \quad = \frac{R_B L^3}{3EI} \quad \uparrow$$

$$\Rightarrow \frac{ML^2}{2EI} = \frac{R_B L^3}{3EI} \Rightarrow R_B = \frac{3M}{2L}$$

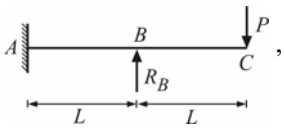
تمرین ۵-۲

در تیر نشان داده شده در شکل، مقدار لنگر خمشی ایجاد شده در تکیه گاه A به کدام‌یک از مقادیر زیر نزدیکتر است؟
(EI در سراسر تیر ثابت می‌باشد) **(پایه ۳ - اسفند ۹۱)**



۱) PL
۲) $\frac{PL}{2}$
۳) $2PL$
۴) $4PL$

حل: تیر مورد نظر یک درجه نامعین است. ابتدا با در نظر گرفتن عدم تغییر مکان نقطه B در راستای قائم به‌عنوان شرط سازگاری، عکس‌العمل این تکیه‌گاه را به‌دست آورده و سپس با بررسی تعادل لنگر حول تکیه‌گاه A ، مقدار لنگر خمشی ایجاد شده در این تکیه‌گاه را به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta_B = 0$$

با استفاده از روابط حفظی خواهیم داشت:

$$\Delta_B = 0 \Rightarrow \frac{PL^3}{3EI} + \frac{(PL)L^2}{2EI} - \frac{R_B L^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{5}{2}P$$

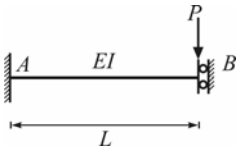
در نهایت لنگر خمشی ایجاد شده در تکیه‌گاه A برابر است با:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = \frac{5}{2}P \times L - P \times 2L = \frac{PL}{2}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین ۵-۳

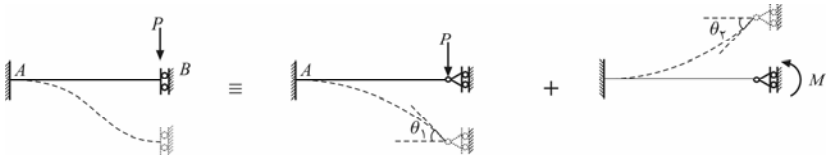
تیر شکل زیر تحت اثر یک‌بار P در محل تکیه‌گاه لغزنده گیردار قرار گرفته است. مقدار لنگر خمشی در هر یک از تکیه‌گاه‌ها برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ **(پایه ۳- ۸۶)**



۱) PL ۲) $\frac{PL}{۲}$

۳) $\frac{PL}{۳}$ ۴) $\frac{PL}{۴}$

حل: در این مثال لنگر تکیه‌گاه B را به‌عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم:



(۱) (۲)

با توجه به شکل (۱) در اثر اعمال بار قائم P در نقطه B چرخش ساعتگرد $\theta_۱$ در انتهای B آن ایجاد می‌شود که مقدار آن معادل زاویه چرخش انتهای یک تیر طره تحت همان بارگذاری می‌باشد و برابر است با: $\theta_۱ = \frac{PL^۲}{۲EI}$

در شکل (۲) در اثر اعمال لنگر متمرکز M در نقطه B زاویه پادساعتگرد $\theta_۲$ در انتهای B ایجاد می‌شود که مقدار آن معادل زاویه چرخش انتهای یک تیر طره تحت همان بارگذاری می‌باشد و برابر است با: $\theta_۲ = \frac{ML}{EI}$

حال با توجه به اصل جمع در شکل‌های (۱) و (۲) و با توجه به اینکه مقدار شیب در نقطه B در سازه اصلی صفر است، شرط سازگاری را لحاظ می‌کنیم: $\theta_B = ۰ \Rightarrow \theta_۱ + (-\theta_۲) = ۰ \Rightarrow \theta_۱ = \theta_۲$ (شرط سازگاری)

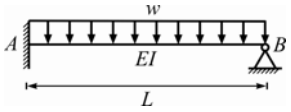
$$\Rightarrow \frac{PL^۲}{۲EI} = \frac{ML}{EI} \Rightarrow M = M_B = \frac{PL}{۲}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

قابل ذکر است که لنگر تکیه‌گاه A همین مقدار $(\frac{PL}{۲})$ می‌باشد و جهت آن نیز پادساعتگرد است.

تمرین ۵-۴

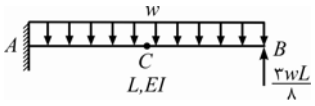
تغییر مکان وسط تیر AB، کدام است؟ **(پایه ۳ - شهریور ۹۱)**



۱) $\frac{wL^۴}{۱۹۲EI}$ ۲) $\frac{wL^۴}{۱۴۴EI}$

۳) $\frac{wL^۴}{۹۶EI}$ ۴) $\frac{wL^۴}{۴۸EI}$

حل: ابتدا باید توجه کنیم تیر موردنظر یک درجه نامعین است و مطابق نکات بیان شده عکس‌العمل تکیه‌گاه B در اثر این بارگذاری برابر $\frac{۳wL}{۸}$ می‌باشد. بنابراین به جای تیر AB تیر زیر را تحلیل می‌کنیم:

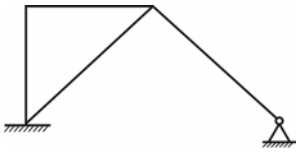


تست‌های فصل ششم

درجه آزادی

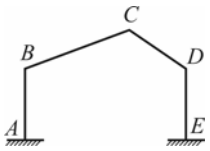
۱- در صورتی‌که از تغییر شکل محوری اعضاء صرف‌نظر شود، تعداد درجات آزادی انتقالی قاب شکل زیر کدام است؟

(پایه ۳- ۸۲)



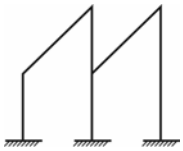
۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۲- در تحلیل قاب شکل زیر با روش تغییر مکان‌ها چند معادله باید نوشته شود؟ **(پایه ۱- ۸۴)**



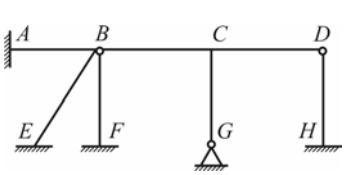
۱) ۳ معادله
۲) ۵ معادله
۳) ۶ معادله
۴) ۷ معادله

۳- کدام‌یک از گزینه‌های زیر تعداد درجات آزادی انتقالی در قاب شکل زیر را بیان می‌کند؟ (از تغییر طول اعضاء صرف‌نظر شود) **(پایه ۳- ۸۶)**



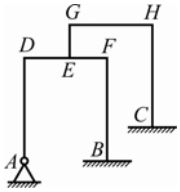
۱) دو درجه
۲) سه درجه
۲) چهار درجه
۴) پنج درجه

۴- مطلوب است تعیین تعداد درجات آزادی انتقالی و دورانی در قاب شکل زیر در صورتی‌که از تغییر شکل محوری اعضاء صرف‌نظر شود. **(پایه ۳- ۸۴)**



۱) $\left.\begin{matrix} n_d = ۱ \\ n_t = ۷ \end{matrix}\right\}$
۲) $\left.\begin{matrix} n_d = ۰ \\ n_t = ۷ \end{matrix}\right\}$
۳) $\left.\begin{matrix} n_d = ۱ \\ n_t = ۵ \end{matrix}\right\}$
۴) $\left.\begin{matrix} n_d = ۰ \\ n_t = ۵ \end{matrix}\right\}$

۵- درجهٔ نامعینی ایستایی و درجه نامعینی هندسی قاب زیر کدام است و از کدام روش نیرو، «نرمی» یا سختی «تغییر مکان»، برای تحلیل این قاب استفاده می‌شود؟ **(پایه ۳ - شهریور ۹۱)**



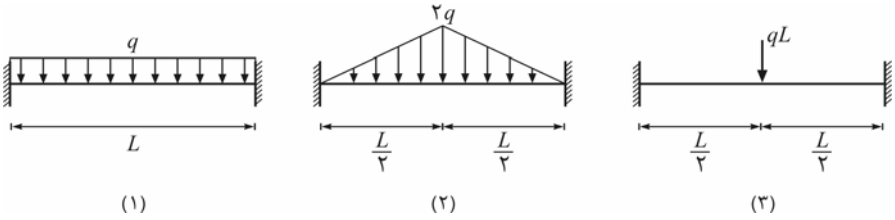
۱) ۳،۶، روش نیرو
۲) ۳،۶، روش تغییر مکان
۳) ۹،۵، روش نیرو
۴) ۹،۵، روش تغییر مکان

روش شیب افت

۶- در روش شیب افت کدام فرض زیر در نظر گرفته می‌شود؟ **(پایه ۳- ۸۱)**

۱) از تغییر شکل ناشی از لنگر خمشی صرف‌نظر می‌شود.
۲) از تغییر شکل ناشی از نیروی محوری و خود نیروی محوری، صرف‌نظر می‌شود.
۳) از تغییر شکل ناشی از نیروی محوری صرف‌نظر می‌شود.
۴) از هیچ‌کدام از تغییر شکل‌ها صرف‌نظر نمی‌شود.

۷- لنگر گیرداری در کدام‌یک از شکل‌های زیر بزرگ‌تر است؟ **(پایه ۳- ۸۴)**



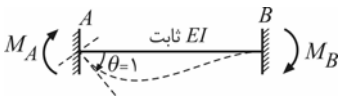
۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) لنگر گیرداری در هر سه حالت یکسان است.

۸- اگر در تیر نشان داده شده تکیه‌گاه B در امتداد قائم به‌اندازه $\frac{۱}{۶EI}$ نشست کند کدام گزینه صحیح است؟

(پایه ۳- ۸۳)

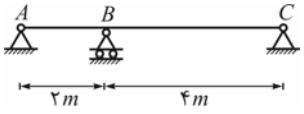
۱) $M_{AB}=M_{BA}=\frac{۱}{L^۲}$ ۲) $M_{AB}=-M_{BA}=\frac{۱}{L^۲}$
۳) $M_{AB}=M_{BA}=\frac{۴}{L^۲}$ ۴) $M_{AB}=-M_{BA}=\frac{۴}{L^۲}$

۹- چنانچه تکیه‌گاه گیردار A از تیر دو سرگیردار نشان داده شده به اندازه θ دوران کند، لنگر خمشی M_B در تکیه‌گاه B برابر است با: **(پایه ۱- ۸۴)**



۱) $\frac{EI}{L}$ ۲) $\frac{۲EI}{L}$
۳) $\frac{۳EI}{L}$ ۴) $\frac{۴EI}{L}$

۱۰- در تیر سراسری ABC با صلبیت خمشی ثابت EI، تکیه‌گاه B به اندازه ۰/۵ سانتی‌متر و تکیه‌گاه C به اندازه ۱/۵ سانتی‌متر نشست می‌کند. مقدار لنگر خمشی ایجاد شده در مقطع B کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ **(پایه ۲- ۸۴)**



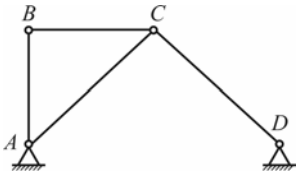
۱) $M_B=۰$
۲) $M_B=۰/۰۱\ EI$
۳) $M_B=۰/۰۱۵\ EI$
۴) $M_B=۰/۰۰۵\ EI$

پاسخ تست‌های فصل ششم

درجه آزادی

۱- (۱)

ابتدا تمام گره‌های سازه را مفصلی می‌کنیم. در این صورت تعداد قیدهای لازم برای پایدار کردن سازه، همان درجات آزادی انتقالی می‌باشد.



قسمت ACD از سازه فوق با توجه به مطالب بیان شده در فصل اول پایدار است (سازه سه مفصل) در این صورت قسمت ABC نیز چنین شرایطی را داشته و در کل، سازه به تنهایی پایدار است و نیاز به هیچ قیدی برای پایداری ندارد. بنابراین درجه آزادی انتقالی سازه صفر است.

سوال: تعداد درجات آزادی دورانی سازه فوق را محاسبه کنید.

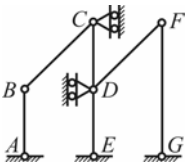
۲- (۲)

به تمرین (۶-۲) درسنامه رجوع کنید.

۳- (۱)

همان‌طور که در درسنامه بیان شد، تعداد تکیه‌گاه‌های غلتکی که سازه را بعد از مفصلی کردن گره‌ها پایدار کند، همان درجه آزادی انتقالی سازه می‌باشد. بنابراین ابتدا گره‌ها را مفصلی می‌کنیم.

با قرار دادن دو تکیه‌گاه غلتکی در نقاط C و D، قسمت‌های DFG و ABC سه مفصل شده و پایدار هستند. قابل ذکر است که با قرار دادن این تکیه‌گاه‌های غلتکی، عضو ED پایدار بوده و می‌توان آن را زمین فرض کرد. بنابراین CD نیز به‌صورت پایدار به آن وصل شده است و این قسمت نیز زمین فرض می‌شود و نقطهٔ C نیز حرکت نخواهد داشت، پس سازه ABC نیز پایدار خواهد بود. بنابراین سازه دو درجه آزادی انتقالی دارد.

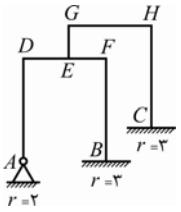


۴- (۲)

با توجه به نکات بیان شده در درسنامه، سازه مورد نظر ۷ درجه آزادی دورانی دارد. توجه کنید در گره B در واقع سه جسم به مفصل متصل شده‌اند، بنابراین این گره سه درجه آزادی دورانی خواهد داشت.

هم‌چنین به دلیل وجود اعضای افقی، قائم و مایل در سازه که به‌طور مناسب به زمین وصل شده‌اند، سازه درجه آزادی انتقالی ندارد.

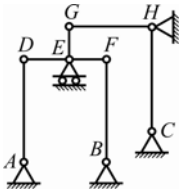
۵- (۳)



برای محاسبهٔ درجه نامعینی ایستایی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$n = (r + ۳k) - (c + ۳)$$
$$r = ۳ + ۳ + ۲ = ۸$$
$$k = ۰$$
$$c = ۰ \quad \Rightarrow \quad n = ۸ - ۳ = ۵$$

درجه نامعینی هندسی همان درجات آزادی دورانی و انتقالی سازه می‌باشد. هر یک از گره‌های A ، D ، F ، E ، G و H یک درجه آزادی دورانی دارند که در مجموع ۶ درجه آزادی دورانی وجود دارد. برای شمارش تعداد درجات آزادی انتقالی تمام گره‌ها را مفصل می‌کنیم و تعداد قیدهای موردنیاز برای پایدار کردن سازه را شمارش می‌کنیم این عدد همان درجه آزادی انتقالی سازه می‌باشد.



با توجه به شکل مقابل با قرار دادن تکیه‌گاه غلتکی در گره E سازه‌های ADE و BFE تبدیل به سازهٔ سه مفصل شده و پایدارند همچنین با قرار دادن یک تکیه‌گاه مفصلی در گره H سازهٔ EGH هم سه مفصل و پایدار خواهد شد بنابراین با اضافه کردن ۳ قید تکیه‌گاهی سازه پایدار می‌شود و ۳ درجه آزادی انتقالی داریم که در مجموع ۹ درجه آزادی هندسی خواهیم داشت.

تعداد مجهولات تحلیل سازه در روش نیرو یا نرمی برابر درجه نامعینی ایستایی سازه می‌باشد و تعداد مجهولات تحلیل سازه در روش سختی یا تغییر مکان برابر درجه آزادی سازه (درجه نامعینی هندسی سازه) که مجموع درجات آزادی انتقالی و دورانی است، می‌باشد. برای سازه‌ای که درجه نامعینی آن عدد کوچکی است، درجه آزادی سازه عدد بالایی می‌شود و با توجه به آنکه ما تمایل داریم در تحلیل سازه با تعداد مجهولات کمتری سر و کار داشته باشیم، نتیجه می‌شود برای تحلیل چنین سازه‌ای روش نرمی از روش سختی مناسب‌تر است. بالعکس برای سازه‌ای که درجه نامعینی آن عدد بالایی است، درجه آزادی سازه عدد کوچکی می‌شود و برای تحلیل چنین سازه‌ای روش سختی از روش نرمی مناسب‌تر است. با توجه به درجات نامعینی و آزادی محاسبه شده برای این سازه، بهتر است از روش نرمی یا نیرو برای تحلیل آن استفاده شود.

روش شیب افت

۶- (۳)

مطابق آنچه در درسنامه بیان شد، در روش شیب افت، از تغییر شکل ناشی از نیروهای محوری و برشی صرف‌نظر می‌شود.

۷- (۳)

مقدار FEM را در هر سه حالت محاسبه می‌کنیم:

$$(FEM)_۱ = \frac{qL^۲}{۱۲}$$

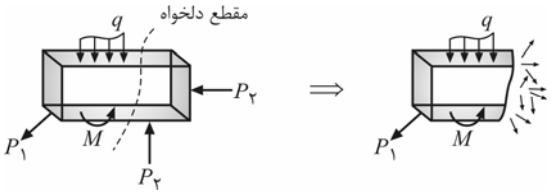
$$(FEM)_۲ = \frac{۵\times(\frac{۲q\times L}{۲})L}{۴۸} = \frac{۵qL^۲}{۴۸} \quad \Rightarrow \quad (FEM)_۳ > (FEM)_۲ > (FEM)_۱$$

$$(FEM)_۳ = \frac{PL}{۸} = \frac{qL\times L}{۸} = \frac{qL^۲}{۸}$$

فصل هفتم: بررسی مفاهیم مهم در مقاومت مصالح

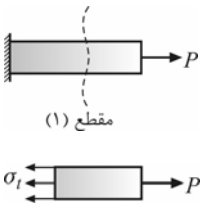
۷-۱- تنش

یک جسم متعادل در فضا را در نظر بگیرید. می‌دانیم برای برقراری تعادل این جسم باید معادلات تعادل استاتیکی برقرار باشد. حال اگر مقطعی از این جسم را مطابق شکل جدا کنیم، برای برقراری تعادل همان قسمت برش خورده نیز باید معادلات تعادل برقرار باشد. برای برقراری این تعادل، نیروهای داخلی در مقطع جسم ایجاد خواهند شد که به شدت این نیروها در واحد سطح، اصطلاحاً تنش گفته می‌شود.



در واقع در مقطع ایجاد شده این نیروهای داخلی هستند که وظیفه تعادل مقطع را برعهده دارند.
تنش‌ها به چند دسته تقسیم می‌شوند: الف) تنش‌های محوری ب) تنش‌های خمشی ج) تنش‌های برشی

۷-۱-۱- تنش‌های ناشی از نیروی محوری



تنش‌های محوری در حالتی در سازه به‌وجود می‌آیند که نیروی محوری در مرکز سطح مقطع جسم وارد شود. در این صورت در سازه تنها تنش‌های فشاری یا کششی (بسته به نوع نیرو) ایجاد خواهد شد. به‌طور مثال در میلهٔ زیر نیروی P در مرکز مقطع میله وارد شده است و در آن تنش‌های کششی ایجاد کرده است.
تنش‌های کششی را با σ_t و تنش‌های فشاری را با σ_c نشان می‌دهیم.

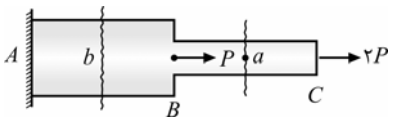
حال برای به‌دست آوردن تنش‌های ایجاد شده در میله، مقطع (۱-۱) را ایجاد می‌کنیم و طبق تعریف داریم:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

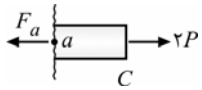
در رابطه فوق، A سطح مقطع جسم، P مقدار نیروی وارد بر مرکز سطح مقطع و σ تنش ایجاد شده در جسم می‌باشد.
واحد تنش معمولاً $kg/cm^۲$ یا $kN/m^۲$ می‌باشد.

تمرین ۷-۱

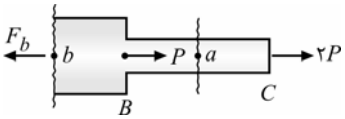
تنش در نقاط a و b بر روی مقطع نشان داده شده را به‌دست آورید. مساحت مقاطع عضوهای AB و BC به‌ترتیب $۲A$ و A می‌باشد.



حل: ابتدا نیرو در مقاطع a و b را به‌دست می‌آوریم.



$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_a = ۲p$$



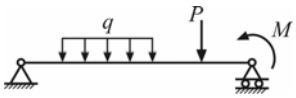
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_b = ۳P$$

سپس برای محاسبهٔ تنش در این نقاط داریم:

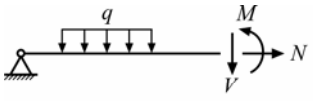
$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{F_a}{A_a} = \dfrac{۲P}{A} \\ \sigma_b = \dfrac{F_b}{A_b} = \dfrac{۳P}{۲A} \end{cases}$$

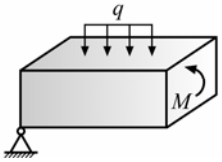
۷-۱-۲- تنش‌های خمشی

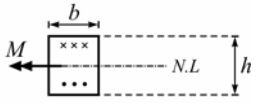
تیر مقابل، مطابق شکل بارگذاری شده است.



در هر نقطه‌ای از این تیر که مقطعی ایجاد کنیم، مؤلفه‌های داخلی ظاهر خواهند شد. یکی از این مؤلفه‌های داخلی لنگر خمشی می‌باشد که در هر مقطعی از تیر، تنش‌های قائم ناشی از خمش را ایجاد خواهد کرد. حال فرض کنید مقطعی از تیر را مطابق شکل جدا کردیم:







لنگر خمشی M قسمت‌های فوقانی مقطع را تحت فشار و قسمت‌های تحتانی را تحت کشش قرار می‌دهد. ناحیه‌ای در وسط مقطع وجود دارد که روی یک خط واقع شده و هیچ تنشی در آن ایجاد نمی‌شود. به این قسمت، محور خنثی گفته می‌شود. بنابراین تحت لنگر خمشی مثبت تنش‌ها در ناحیه بالای محور خنثی از نوع فشاری (σ_c) و در ناحیه زیر محور خنثی از نوع کششی (σ_t) می‌باشد و مقدار آن از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

M : مقدار لنگر خمشی در نقطه مورد نظر، y : ارتفاع نقطه مورد نظر از محور خنثی (پایین محور خنثی y منفی است)، I : ممان اینرسی مقطع (برای مستطیل با عرض b و ارتفاع h برابر است با $\frac{bh^۳}{۱۲}$، برای مثلث با قاعدهٔ b و ارتفاع h برابر است با $\frac{bh^۳}{۳۶}$ و برای دایره به شعاع R برابر است با $\frac{\pi R^۴}{۴}$)