بسم الله الرحمن الرحيم

سخن مدیر تألیف

سپاس خداوند متعال را که در سختی‌ها ما را تنها نگذاشته و به بندگان مخلص خود، توان دو چندان عنایت می‌کند. پروردگارا قدر الطاف تو را می‌دانیم و با تلاشی بیشتر از گذشته، سعی می‌کنیم تا منشأ تحولاتی مثبت باشیم.

سال‌هاست که همکاران عزیز ما در عرصه انتشار کتاب‌های دانشگاهی، خدمت به جوانان ایران‌زمین را سرلوحهٔ کار خود قرار داده‌اند. نشر و چاپ کتاب همواره با مشکلات و سختی‌های فراوان مواجه بوده و تنها اراده‌ای مستحکم وعزمی جزم، آن را امکان‌پذیر می‌سازد. انتشارات سیمای دانش یکی از مطرح‌ترین ناشرین کشور در زمینهٔ تولید و چاپ کتاب‌های دانشگاهی است که با مدیریت موفق جناب آقای مجتبی طالقانی گام‌های مؤثر و مستحکمی را در این عرصه برداشته است. پایبندی به اصول اخلاقی و حرفه‌ای، شناخت صحیح از نیازهای مخاطبین و همکاری با اساتید برجسته از ویژگی‌های این ناشر موفق است. از سوی دیگر گروه آموزشی جوان و فعال موسسهٔ سری عمران به مدیریت جناب آقای دکتر حسام شریفیان، با سابقه‌ای درخشان در زمینهٔ نشر کتب کم‌نقص و معتبر دانشگاهی، به‌عنوان یک قطب جدید و کاملاً موفق در مهندسی عمران در سالیان اخیر مطرح شده است. اهداف بلندمدت و منسجم این مؤسسه در زمینه نشر کتب مرجع، کتاب‌ها و کلاس‌های کاربرد نرم‌افزار در مهندسی عمران و همچنین فعالیت در کنکور کارشناسی ارشد، نویدبخش آینده‌ای درخشان و ایجاد فضایی متفاوت برای مهندسان عمران است. اگرچه کار گروهی و مشترک در میان ما مردمان ایران‌زمین رایج نمی‌باشد، اما این بار بر آن شدیم تا با همکاری سیمای دانش و سری عمران، ثابت کنیم که ما هم می‌توانیم. آنچه در این راستا برای ما پراهمیت بود، نتیجه کار و حاصلی بود که در اختیار دانشجویان عزیز قرار می‌گرفت که رضایت خاطر آن‌ها محل آرامش هر وجدان بیدار و متعهدی می‌باشد. دانشجویان ما لیاقت آن را دارند که با صرف کمترین زمان ممکن، بیشترین بهره را از مطالعه یک کتاب ببرند. دانشجوی ما باید کتابی کم‌نقص، پرمحتوا و شاید جذاب در کنار خود ببیند. دانشجویان ما سرمایه‌های آیندهٔ ایران هستند.

سخن مدیر تألیف

در همین راستا یک سری کامل از کتاب‌های کنکور کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران توسط انتشارات سیمای دانش و مؤسسه سری عمران تقدیم می‌گردد. این کتب حاصل تلاش بی‌وقفه افرادی متعهد و دلسوز است که کیفیت برتر را سرلوحهٔ کار خود قرار داده‌اند. کتاب مکانیک جامدات (در دو جلد مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها)، کتاب دوجلدی مکانیک خاک و پی‌سازی، کتاب دوجلدی مکانیک سیالات و هیدرولیک، کتاب طراحی (در دو جلدِ سازه‌های فولادی و بتنی) و کتاب دوجلدی راهسازی و روسازی، حاصل تلاش ما در دروس تخصصی مهندسی عمران است.
از ویژگی‌های شاخص این کتاب‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- شرح درس منسجم و قوی
- ارائه تمرین‌های متنوع در تکمیل شرح درس
- تست‌های تألیفی جهت خودآزمایی و تسلط بیشتر
- طبقه‌بندی کلیهٔ سؤالات آزمون‌های کارشناسی ارشد عمران
- عدم نیاز به ماشین‌حساب در پاسخگویی به تمامی تمرین‌ها و تست‌های کتاب ازجمله سؤالات کنکور کارشناسی ارشد عمران در سالهای دور.

این مجموعه تقدیم می‌شود به تمام دانشجویان و مهندسان عمران در سراسر ایران عزیز. به امید روزی که آموزش علم نیز همچون خود علم در کشور عزیزمان ایران، مهم شمرده شود و عزیزان آشنا به این مقوله، فارغ از انگیزه‌های مادی به جوانان این مرز و بوم خدمت کنند.

ساسان امیرافشاری

فهرست مطالب

فصل اول: تنش و کرنش

مقدمه

فصل تنش و کرنش از فصل‌های مفهومی، پایه‌ای و پرکاربرد در فصل‌های بعدی کتاب محسوب می‌شود. درک صحیح از مفاهیم این فصل، باعث درک صحیح از درس مقاومت مصالح می‌شود. این فصل را به دو قسمت کلی تقسیم می‌کنیم:

۱- مفاهیم تنش و کرنش: مسائل قابل طرح در این قسمت، در یکی از دسته‌های زیر قرار می‌گیرد:

*** دستهٔ اول: آشنایی با مفاهیم تنش نرمال و تنش برشی شامل:**

۱- محاسبهٔ تنش نرمال در اعضاء تحت نیروی محوری در حالات مختلف

۲- محاسبهٔ تنش برشی متوسط در مقطع اعضاء و پیچ‌ها

*** دستهٔ دوم: آشنایی با مفاهیم کرنش نرمال و کرنش برشی شامل:**

۱- آشنایی با قانون هوک و خاصیت پواسون

۲- محاسبهٔ کرنش نرمال در یک المان، در راستای x، y و z در حالت کلی

۳- محاسبهٔ تغییر طول، تغییر سطح و تغییر حجم در یک المان و بررسی مسائل رایج در کنکور

۴- آشنایی با مفهوم کرنش برشی

۲- تبدیلات تنش و کرنش: مسائل قابل طرح در این قسمت در یکی از دسته‌های زیر قرار می‌گیرد:

*** دستهٔ سوم: بررسی تبدیلات تنش در یک المان شامل:**

۱- روابط محاسبهٔ تنش‌های قائم و برشی در یک المان دوبعدی و آشنایی با حالات خاص

۲- بررسی صفحات اصلی تنش و صفحات برش ماکزیمم در حالات دوبعدی

۳- روش ترسیمی دایرهٔ مور برای محاسبهٔ تنش برشی و نرمال در صفحات مختلف یک المان دوبعدی

۴- بررسی المان دوبعدی با وجوه مورب و المان تنش دوبعدی در حالت خاص با کمک دایرهٔ مور

۵- بررسی المان تنش سه‌بعدی در حالات خاص و دایرهٔ مور تنش سه‌بعدی

*** دستهٔ چهارم: بررسی تبدیلات کرنش در یک المان شامل:**

۱- بررسی تبدیلات کرنش در یک المان دوبعدی با کمک روابط و دایرهٔ مور

۲- بررسی تبدیلات کرنش در یک المان سه‌بعدی

در ادامه پس از یادگیری مفاهیم مورد نیاز، به بررسی دسته‌بندی ارائه شده در هر قسمت می‌پردازیم. دستهٔ دوم و دستهٔ سوم به طور نسبی از اهمیت بیشتری نسبت به سایر قسمت‌ها برخوردار می‌باشند.

قسمت اول: مفاهیم تنش و کرنش

۱-۱- مفاهیم اولیه

در روند طراحی یک سازه، درنگاه اول دو موضوع زیر باید توسط یک مهندس مدنظر قرار گیرد:

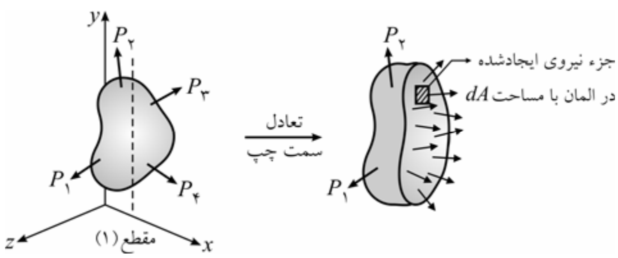
۱- شدت نیروهای ایجاد شده در عضو، نباید از مقدار مجاز بیشتر شود.

۲- تغییر شکل ایجاد شده در عضو، نباید از مقدار مجاز بیشتر شود.

برای بررسی این دو موضوع، نیاز است تا در یک درس مجزا به بررسی مفاهیمی با عنوان‌های **تنش** و **کرنش** بپردازیم. در درس مقاومت مصالح، تلاش می‌کنیم که تنش و کرنش ایجاد شده در عضو در اثر بارگذاری‌های مختلف را محاسبه کنیم. شایان ذکر است که این درس، پایه و اساس بسیاری از درس‌های طراحی در مهندسی عمران، مانند فولاد و بتن است.

۲-۱- آشنایی با مفهوم تنش

جسمی مطابق شکل روبه‌رو، تحت اثر نیروهای نشان داده شده قرار گرفته و در حال تعادل است. فرض کنید که در این جسم، مقطع (۱) را ایجاد کرده و تعادل سمت چپ آن را درنظر بگیریم:



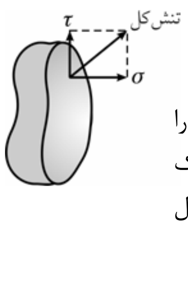
برای ایجاد تعادل مقطع سمت چپ تحت اثر بارگذاری وارده، در هر یک از نقاط مقطع جزء نیروهایی ایجاد می‌شود که در درس مقاومت مصالح، به بررسی شدت این جزء نیروها برای هر نقطه پرداخته و آن را **تنش** می‌نامیم.

تذکر ۱: به مؤلفهٔ جزء نیرو عمود بر سطح، **تنش عمودی** یا **نرمال** می‌گویند و آن را با σ نشان می‌دهند.

تذکر ۲: به مؤلفهٔ جزء نیرو مماس بر سطح، **تنش برشی** یا **مماسی** می‌گویند و آن را با τ نشان می‌دهند.

τ : تنش برشی یا مماسی

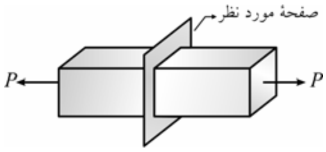
σ : تنش عمودی یا نرمال



برای محاسبهٔ تنش عمودی و تنش برشی، ابتدا با یک فرض ساده کننده، توزیع تنش را مشخص کرده و سپس با کمک معادلات تعادل مقدار تنش را محاسبه می‌کنیم. برای درک بهتر به ادامهٔ مطالب که با بررسی چند مثال، به محاسبهٔ مقدار تنش‌های برشی و نرمال می‌پردازد توجه شود.

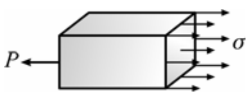
۱-۲-۱- محاسبهٔ تنش نرمال درچند سازه تحت اثر نیروی محوری

برای آشنایی با محاسبهٔ تنش نرمال و درک مفاهیم آن، به تمرین‌های زیر دقت شود.



تمرین ۱-۱: در شکل مقابل، یک میلهٔ منشوری با سطح مقطع ثابت A تحت اثر نیروی کششی P واقع در مرکز سطح میله قرار دارد. تنش کششی ایجاد شده در میله و در صفحهٔ نشان داده شده را به‌دست آورید.

حل: برای محاسبهٔ تنش، فرض می‌کنیم که تنش در محل صفحهٔ مورد نظر یکنواخت است (فرض ساده‌کننده).
با این فرض و با نوشتن معادلهٔ تعادل در راستای افق داریم:



$$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\sigma}_{\text{شدت نیرو در واحد سطح}}\times\underbrace{A}_{\text{مساحت اثر نیروی گستردهٔ سطحی}} - P = 0 \;\Rightarrow\; \sigma = \frac{P}{A}$$

با توجه به این مثال، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- به طور کلی اگر نیروی محوری ایجاد شده در یک عضو منشوری (با سطح مقطع ثابت) برابر N باشد، مقدار تنش محوری ایجاد شده در عضو برابر است با:

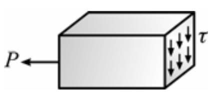
$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \qquad (1-1)$$

A: مساحت مقطع عضو N: نیروی محوری در هر مقطع

۲- در مقاومت مصالح، تنش نرمال کششی به صورت قراردادی دارای علامت مثبت و تنش نرمال فشاری دارای علامت منفی می‌باشد.

نیروی محوری کششی $\Rightarrow \sigma > 0$,   نیروی محوری فشاری $\Rightarrow \sigma < 0$

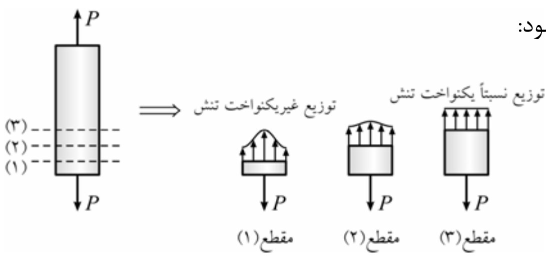
۳- ممکن است این سؤال مطرح شود که چرا در صفحهٔ قائم نشان داده شده، تنش برشی وجود ندارد. برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا فرض می‌کنیم که تنش برشی τ در صفحهٔ مورد نظر حضور دارد و معادلهٔ تعادل نیروها در راستای قائم را بررسی می‌کنیم:



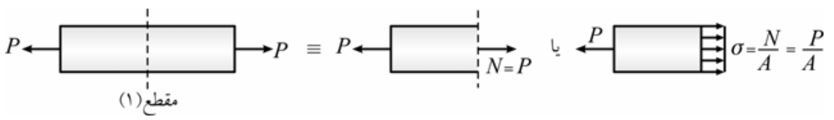
$$+\!\uparrow \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -\tau\times A = 0 \;\Rightarrow\; \tau = 0$$

به عبارت دیگر می‌توان گفت با توجه به این‌که تحت اثر بارگذاری نشان داده شده نیروی برشی در صفحهٔ مورد نظر ایجاد نمی‌شود، تنش برشی نیز در آن صفر است.

۴- بر طبق اصل سن‌ونانت، اعتبار رابطهٔ (۱-۱) زمانی است که به اندازهٔ کافی از محل اثر نیرو دور شده باشیم. به عبارتی در نزدیکی محل اثر نیرو، توزیع تنش نرمال در مقطع یکنواخت نمی‌باشد. برای درک بهتر، به شکل زیر در مورد نحوهٔ توزیع تنش در مقطع توجه شود:



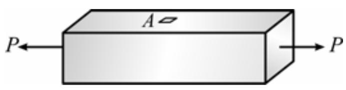
۵- برآیند تنش‌های ایجاد شده در هر مقطع، با نیروهای داخلی که در استاتیک محاسبه می‌شود، یکسان است. به طور مثال در شکل زیر، برآیند تنش‌های σ برابر نیروی محوری P بوده و مقدار نیروی محوری نیز با توجه به محاسبات استاتیک برابر P است.



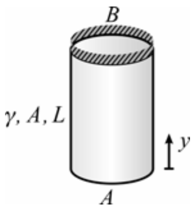
۶- همان‌گونه که مشاهده می‌شود، تنش از جنس نیرو بر سطح بوده و واحدهای رایج آن در مهندسی عمران عبارت است از:

$$SI \text{ سیستم : } 1\ \frac{N}{m^2} = 1\,Pa\ ,\ 1\ \frac{N}{mm^2} = 10^6\ \frac{N}{m^2} = 1\,MPa$$

$$MKS \text{ سیستم : } 1\,kgf/cm^2 \simeq 0/1\,MPa\ ,\ 1000\ \ kgf/cm^2 = 1\,ton/cm^2$$

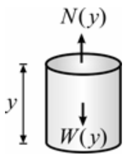


۷- به سطح آزاد و بدون بارگذاری اجسام، **سطح آزاد تنش** گفته می‌شود. در سطح آزاد تنش، مقادیر تنش برشی و نرمال صفر است. مثلاً تنش برشی و نرمال، در صفحهٔ نشان داده شده در A صفر است.



تمرین ۱-۲: در شکل مقابل، یک استوانهٔ منشوری با وزن مخصوص γ و مساحت مقطع A، از سقف آویزان است. تنش نرمال در فاصلهٔ y از انتهای آزاد استوانه را محاسبه کنید.

حل: در فاصلهٔ y از انتهای آزاد، نیروی محوری ایجاد شده با وزن قسمت هاشورخورده برابر است و می‌توان نوشت:



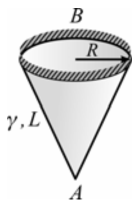
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \ \Rightarrow\ N(y) = W(y) \\ W(y) = \gamma V(y) = \gamma \underbrace{A}_{\text{مساحت استوانه}} \times \underbrace{y}_{\text{ارتفاع قسمت هاشورخورده}} \end{cases} \Rightarrow\ N(y) = \gamma A y$$

و تنش در فاصلهٔ y از انتهای آزاد میله عبارت است از:

$$\sigma(y) = \frac{N(y)}{A} = \frac{\gamma A y}{A} = \gamma y$$

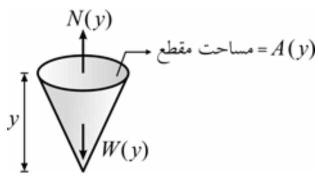
همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در این تمرین بیشترین تنش در بزرگترین مقدار y یعنی در مقطع B رخ می‌دهد.

$$y_{max} = y_B = L\ \Rightarrow\ \sigma_{max} = \gamma L$$



تمرین ۱-۳: در شکل مقابل، یک مخروط که شعاع آن در بالاترین مقطع برابر R می‌باشد، تحت اثر وزن خود قرار دارد. بیشترین تنش نرمال ایجاد شده در مخروط را به‌دست آورید.

حل: اگر در فاصله y از انتهای آزاد، سطح مقطع مخروط برابر $A(y)$ فرض شود، نیروی محوری ایجاد شده با وزن قسمت هاشورخورده برابر بوده و می‌توان نوشت:



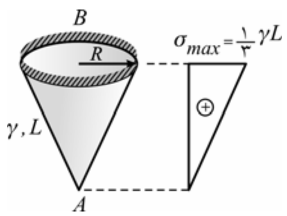
$$\begin{cases} \sum F_y = ۰ \Rightarrow N(y) = W(y) \\ W(y) = \gamma V(y) = \gamma \times \left[\frac{۱}{۳} A(y) \times y \right] \end{cases} \Rightarrow N(y) = \frac{۱}{۳} \gamma A(y)\, y$$

در ادامه در فاصلهٔ y از انتهای A، نیروی محوری در این مقطع را تقسیم بر مساحت این مقطع کرده و مقدار تنش نرمال را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma(y) = \frac{N(y)}{A(y)} = \frac{\frac{۱}{۳}\gamma A(y)\, y}{A(y)} = \frac{۱}{۳}\gamma y$$

بنابراین بیشترین مقدار تنش نرمال در بزرگترین مقدار y یعنی در مقطع B رخ می‌دهد:

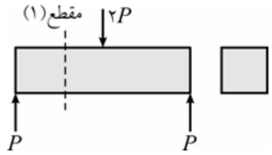
$$y_{max} = y_B = L \;\Rightarrow\; \sigma_{max} = \frac{۱}{۳}\gamma L$$



تذکر: در این تمرین، تنش نرمال موجود در هر مقطع کششی بوده و در ارتفاع مقطع به صورت خطی مطابق شکل مقابل تغییر می‌کند:

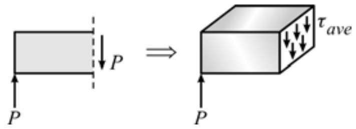
۱-۲-۲- محاسبهٔ تنش برشی در اعضاء

برای یادگیری نحوهٔ محاسبهٔ تنش برشی، به بررسی مقدار تنش برشی ایجاد شده در مقطع عضو در تمرین‌های زیر می‌پردازیم.



تمرین ۱-۴: در تیر مقابل با سطح مقطع ثابت A، نیروهای نشان داده شده اثر کرده است. تنش برشی متوسط در مقطع (۱) چقدر است؟

حل: در صورتی‌که تنش برشی در مقطع (۱) را ثابت و برابر τ_{ave} فرض کنیم، با بررسی تعادل در راستای قائم می‌توان نوشت:



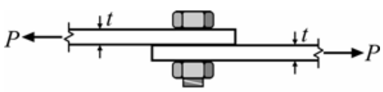
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow P - \underbrace{\tau_{ave}}_{\text{شدت بارگذاری سطحی}} \times \underbrace{A}_{\text{مساحت اثر بارگذاری سطحی}} = ۰ \Rightarrow \tau_{ave} = \frac{P}{A}$$

تذکر ۱ : با توجه به استاتیک، نیروی برشی در مقطع مورد نظر برابر P می‌باشد. می‌توان گفت بـرای محاسـبهٔ تنش برشی متوسط، کافیست نیروی برشی موجود در مقطع بر مساحت مقطع تقسیم شود.

$$\boxed{\tau_{ave} = \frac{V}{A}} \qquad (۲-۱)$$

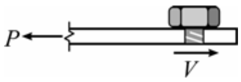
تذکر ۲: فرض توزیع یکنواخت برای تنش برشی، فرض صحیحی نبوده و نحوهٔ صـحیح توزیـع تـنش برشـی در فصل (۵) به صورت کامل بررسی می‌شود.

تذکر ۳: در مواردی که سطح مقطع عضو کوچک است (مانند سطح مقطع پیچ‌ها)، فرض توزیع یکنواخت تنش برشی قابل قبول بوده و از خطای کمی برخوردار است.



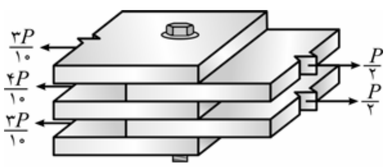
تمرین ۱-۵: در شکل مقابل، دو صفحه با ضخامت کم توسط یک پیچ با قطر d به یکدیگر متصل شـده انـد. تـنش برشـی متوسط ایجاد شده در مقطع پیچ را به‌دست آورید.

حل: اگر در محل اتصال دو ورق مقطعی زده و تعادل ورق بالایی را در راستای افق بنویسیم، نیروی برشی ایجـاد شده در مقطع پیچ برابر P است.

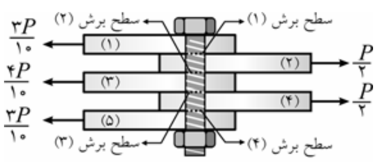


$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; V = P$$

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

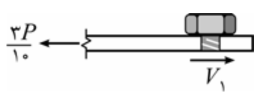


تمرین ۱-۶: در شکل مقابل ، پنج ورق فولادی با پیچـی بـا سطح مقطع A به یکدیگر متصل شـده و نیـروی P را انتقـال می‌دهند. بیشترین مقدار تنش برشی متوسط در پـیچ چقـدر است؟



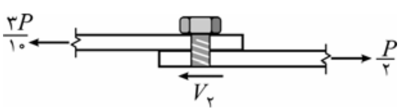
حل: ابتدا باید توجه شود که با توجه به شکل مقابل، این پـیچ دارای ۴ سطح برش است و برای محاسبهٔ تـنش برشـی ایجـاد شده در هر یک از این سطوح، ابتدا باید نیروی برشی در مقطع پیچ را محاسبه کرد:

تعادل ورق (۱) :



$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; V_1 = \frac{3P}{10} \;\Rightarrow\; \tau_1 = \frac{V_1}{A} = \frac{3P}{10A}$$

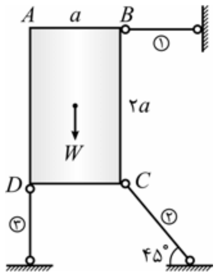
تعادل ورق‌های (۱) و (۲) :



تست‌های فصل اول

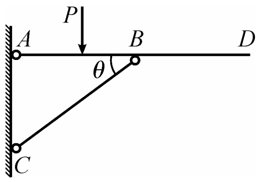
سؤالات تألیفی

۱- صفحهٔ $ABCD$ تحت اثر وزن خود (W) قرار دارد. ایـن صفحه در نقاط B ، C و D به طور ساده توسط میله‌هـای (۱)، (۲) و (۳) نگه داشته شده است. نوع تنش نرمال در میله‌های (۱)، (۲) و (۳) چگونه است؟



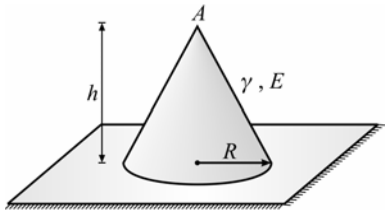
۱) فشاری - فشاری - کششی
۲) فشاری -کششی - فشاری
۳) کششی - فشاری - کششی
۴) کششی - کششی - فشاری

۲- نقطه اثر نیروی قائم و متمرکز P روی تیر ABD کجا باشد تا تنش نرمال در میلهٔ BC حداکثر گردد؟



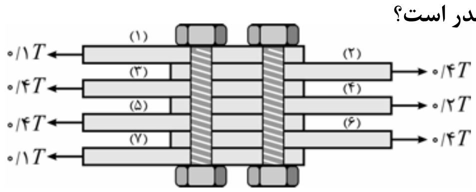
۱) نقطهٔ B
۲) نقطهٔ D
۳) تنش در میلهٔ BC همواره صفر است.
۴) تنش در میلهٔ BC ، با حرکت نیروی P تغییر نمی‌کند.

۳- مخروط مقابل تحت اثر وزن خود بر روی یک سطح افقی قرار دارد. تنش نرمال در وسط ارتفاع مخروط، چند برابر تنش نرمال در قاعدهٔ مخروط است؟



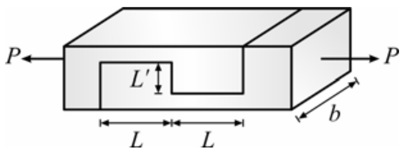
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

۴- ورق‌های نشان داده شده، توسط دو پیچ با سطح مقطع A مطابق شکل نیروی T را منتقل می‌کنند. حداکثر مقدار تنش برشی متوسط در هر یک از این پیچ‌ها چقدر است؟



۱) $۰/۱۵\frac{T}{A}$
۲) $۰/۲\frac{T}{A}$
۳) $۰/۳\frac{T}{A}$
۴) $۰/۴\frac{T}{A}$

۵- دو قطعه چوب، مطابق شکل بر روی یکدیگر قرار گرفتــه و تنش مجاز فشاری بین دو قطعهٔ چوب برابر $۲۰۰\ kg/cm^۲$ است. حداقل مقدار لازم برای L' چند سانتی‌متر اســت؟ (از اصطکاک بین دو قطعه چوب صرف‌نظر شود)



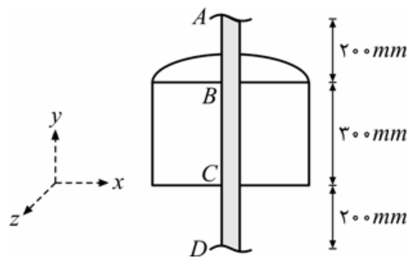
$P = ۲۰۰۰۰\,kg \ ,\ b = ۲۵\,cm$

۱) $۸\,cm$
۲) $۴\,cm$
۳) $۲\,cm$
۴) $۱\,cm$

۶- کاهش حجم یک کرهٔ توپر فولادی با شعاع $۲۵\,cm$ ، تحت اثر فشار هیدرواستاتیکی یکنواخت معادل $۷۰۰\,Pa$ چند مترمکعب است؟ (ضریب پواسون ۰/۳، مدول الاستیسیتهٔ $۲۱\times۱۰^{۵}\,Pa$ و $\pi \approx ۳$ فرض شود)

۱) ۲۰×۱۰^{-۶} ۲) ۲۵×۱۰^{-۶} ۳) ۳۰×۱۰^{-۶} ۴) ۳۵×۱۰^{-۶}

۷- میلهٔ توپر برنجی AD در محدودهٔ BC ، تحت فشار هیدرواستاتیک شعاعی $۶۰\,MPa$ قرار دارد. افزایش طول میلهٔ AD با فرض $E = ۱۰۰\,GPa$ و $\nu = \frac{۱}{۳}$ کدام است؟



۱) $\Delta_y = ۱۰^{-۳}\,m$

۲) $\Delta_y = ۰/۱۲\times۱۰^{-۳}\,m$

۳) $\Delta_y = ۰/۱۵\times۱۰^{-۳}\,m$

۴) $\Delta_y = ۰/۲۷\times۱۰^{-۳}\,m$

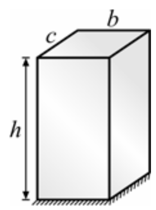
۸- یک میلهٔ استوانه‌ای توپر با طول L ، مدول الاستیسیتهٔ E و ضریب پواسون ν و با شعاع قاعدهٔ R در سطح جانبی خود، تحت فشار شعاعی یکنواخت و ثابت $P_{\circ}$ قرار دارد. تغییر سطح جانبی این استوانه چند برابر $۲\pi\frac{P_{\circ}}{E}RL$ است؟

۱) ۲ν ۲) ۳ν ۳) $۲\nu-۱$ ۴) $۳\nu-۱$

۹- مکعبی به ابعاد a ، در حفره‌ای به همان ابعاد قرار گرفته و از پنج طرف توسط دیوارهٔ صلب و بدون اصطکاکی محصور شده است. اگر مکعب را به اندازهٔ ΔT گرم کنیم، تغییر حجم آن چقدر است؟ (مدول الاستیسیته و ضریب پواسون مکعب E و $\nu = \frac{۱}{۳}$ بوده و ضریب انبساط حرارتی آن برابر α است)

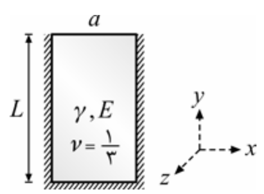
۱) $۳\alpha a^{۳}\Delta T$ ۲) $۲/۵\alpha a^{۳}\Delta T$ ۳) $۲/۲۵\alpha a^{۳}\Delta T$ ۴) $۲\alpha a^{۳}\Delta T$

۱۰- مکعب‌مستطیل مقابل، تحت اثر وزن خود قرار دارد. مقدار تغییر ارتفاع این مکعب‌مستطیل چقدر است؟ (وزن مخصوص جسم γ و مدول الاستیسیتهٔ آن E می‌باشد)



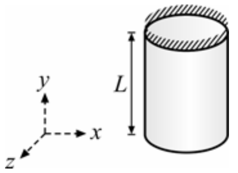
۱) $\frac{\gamma h^{۲}}{E}$ ۲) $\frac{\gamma h^{۲}}{۲E}$ ۳) $\frac{\gamma h^{۲}}{۳E}$ ۴) $\frac{\gamma h^{۲}}{۴E}$

۱۱- در شکل مقابل، یک مکعب‌مستطیل با وزن مخصوص γ و ابعاد $L\times a\times a$ تحت اثر وزن خود قرار داشته و از پنج طرف در داخل یک دیوارهٔ صلب و بدون اصطکاک قرار دارد. تغییر ارتفاع این مکعب‌مستطیل برابر است با:



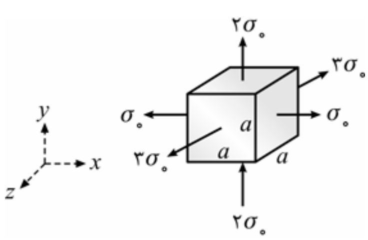
۱) $\frac{\gamma L^{۲}}{۶E}$ ۲) $\frac{\gamma L^{۲}}{E}$ ۳) $\frac{\gamma L^{۲}}{۲E}$ ۴) $\frac{\gamma L^{۲}}{۳E}$

۱۲- در شکل مقابل، استوانه‌ای با وزن مخصوص γ از سقف آویزان است. اگر ضریب پواسون استوانه ν، وزن مخصوص γ و مدول الاستیسیتهٔ آن E باشد، تغییر حجم این استوانه برابر است با:



۱) $\dfrac{2\nu\,\gamma\pi R^2L^2}{E}$　۲) $\dfrac{(1-2\nu)\gamma\pi R^2L^2}{2E}$　۳) $\dfrac{(1-2\nu)\gamma\pi R^2L^2}{4E}$　۴) $\dfrac{(1-2\nu)\gamma\pi R^2L^2}{E}$

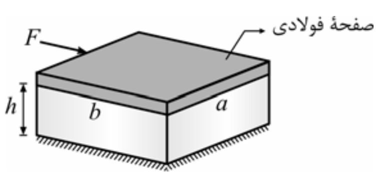
۱۳- تغییر سطح جانبی المان مقابل، تحت اثر تنش‌های وارد بر مکعب چقدر است؟



۱) $\dfrac{12\,a^2(1-2\nu)\sigma_0}{E}$　۲) $\dfrac{24\,a^2(1-2\nu)\sigma_0}{E}$

۳) $\dfrac{8\,a^2(1-2\nu)\sigma_0}{E}$　۴) $\dfrac{16\,a^2(1-2\nu)\sigma_0}{E}$

۱۴- یک قطعه از مصالح نرم با مدول برشی G و به ضخامت h مطابق شکل مقابل، توسط یک صفحهٔ فولادی نازک به طول a و عرض b روکش شده است. چنانچه این مجموعه در جهت طولی تحت اثر نیروی برشی افقی F قرار گیرد، تغییر مکان افقی صفحهٔ فولادی برابر است با:



۱) $\dfrac{2Fh}{abG}$　۲) $\dfrac{Fh}{abG}$　۳) $\dfrac{Fh}{2abG}$　۴) $\dfrac{Fh}{4abG}$

۱۵- صفحه‌ای مستطیلی و نازک با ابعاد ۲۰۰ میلی‌متر در جهت x و ۱۰۰ میلی‌متر در جهت y با ضخامت یک میلی‌متر، تحت اثر تنش‌های σ_x و σ_y روی لبه‌ها و در راستای طولی صفحه قرار گرفته است. چنانچه تحت اثر تنش‌های فوق، صفحهٔ مذکور در جهات x و y به ترتیب ۴ و ۲ میلی‌متر تغییر طول داده باشد، تنش‌های σ_x و σ_y برابر است با:

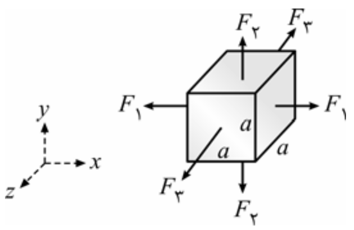
۱) $\sigma_x = \dfrac{0/02E}{1-\nu}\ ,\ \sigma_y = \dfrac{0/02E}{1-\nu}$

۲) $\sigma_x = 0/04E\left(\dfrac{1+\nu}{1-\nu^2}\right)\ ,\ \sigma_y = \dfrac{0/04}{E}\left(\dfrac{1+\nu}{1-\nu^2}\right)$

۳) $\sigma_x = \dfrac{0/02E}{1+\nu}\ ,\ \sigma_y = \dfrac{0/02E}{1+\nu}$

۴) $\sigma_x = \dfrac{0/02}{E}\left(\dfrac{1-\nu^2}{1+\nu^2}\right)\ ,\ \sigma_y = \dfrac{0/04}{E}\left(\dfrac{1-\nu^2}{1+\nu^2}\right)$

۱۶- مکعب همگن و ایزوتروپ مقابل، تحت اثر سه نیروی F_1، F_2 و F_3 در سه جهت خود قرار دارد به طوری که تغییر طول آن در امتدادهای F_2 و F_3 صفر است. اگر ضریب پواسون مصالح ۰/۲۵ باشد، تنش برشی حداکثر چند برابر $\dfrac{F_1}{a^2}$ است؟

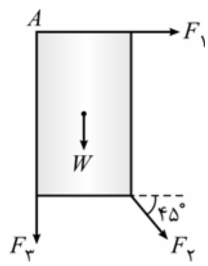


۱) $\dfrac{1}{3}$　۲) $\dfrac{1}{2}$　۳) $\dfrac{2}{3}$　۴) ۱

پاسخ تست‌های فصل اول

۱- (۲)

برای بررسی نوع تنش در میله‌های (۱) ، (۲) و (۳) ، باید نیروهای آنها را محاسبه کنیم. برای حل ابتدا با لنگرگیری حول A ، نیروی میلهٔ (۲) را محاسبه کرده، سپس با تعادل در راستای افق نیروی میلهٔ (۱) را محاسبه کرده و سپس با بررسی تعادل در راستای قائم نیروی میلهٔ (۳) را محاسبه می‌کنیم:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow W \times \frac{a}{۲} + F_۲ \sin ۴۵ \times a - F_۲ \cos ۴۵ \times ۲a = ۰$$

$$F_۲ = +\frac{\sqrt{۲}}{۲} W \quad (\text{کششی})$$

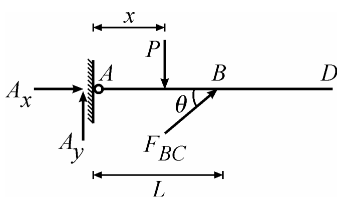
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_۱ + F_۲ \cos ۴۵^\circ = ۰ \Rightarrow F_۱ = -\frac{۱}{۲} W \quad (\text{فشاری})$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_۳ + W + F_۲ \sin ۴۵^\circ = ۰ \Rightarrow F_۳ = -\frac{۳}{۲} W \quad (\text{فشاری})$$

بنابراین تنش نرمال در میله‌های (۱) و (۳) فشاری و در میلهٔ (۲)کششی است.

تذکر: برای حل این سؤال، در نمودار جسم آزاد سازه نیروی محوری همهٔ اعضاء به صورت کششی گذاشته شده و اعضایی که نیروی آنها منفی به دست می‌آید، نیروی فشاری دارند.

۲- (۲)



هرچه نیروی محوری عضو BC بیشتر باشد، تنش نرمال نیز در آن بیشتر است. اگر فاصلهٔ نیروی P از A برابر x فرض شود، با لنگرگیری حول نقطهٔ A نیروی میلهٔ BC عبارت است از:

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow F_{BC} \sin\theta \times L - P \times x = ۰$$

$$F_{BC} = \frac{P}{\sin\theta} \times \frac{x}{L}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، هر چه فاصلهٔ x بیشتر باشد، نیرو در عضو BC بیشتر شده و تنش نیز در آن بیشتر می‌شود. با توجه به این موضوع، نیروی BC زمانی بیشینه است که نیروی P در نقطهٔ D وارد شود.

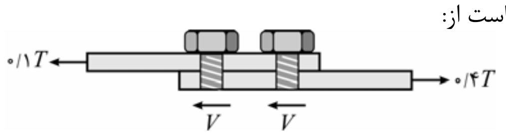
۳- (۱)

در این تست نیز مانند تمرین (۱-۳) در درس‌نامه، تنش در فاصله y از نقطهٔ A برابر $\frac{۱}{۳}\gamma y$ و فشاری می‌باشد. بنابراین در مقایسهٔ تنش در وسط ارتفاع مخروط با تنش در محل تکیه‌گاه داریم:

$$\sigma = -\frac{۱}{۳}\gamma y \Rightarrow \frac{\sigma_۱}{\sigma_۲} = \frac{y_۱}{y_۲} = \frac{\frac{h}{۲}}{h} = \frac{۱}{۲}$$

۴- (۱)

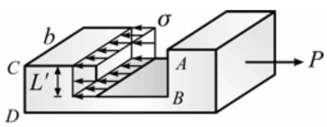
با توجه به تمرین (۱-۶) در درس‌نامه بیشترین نیروی برشی ایجاد شده در پیچ‌ها، در سطح برش بین ورق (۲) و (۳) ایجاد می‌شود (چرا؟) و مقدار آن عبارت است از:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 0/4T - 2V - 0/1T = 0 \Rightarrow V = 0/15T$$

و بیشترین مقدار تنش برشی ایجاد شده در پیچ برابر است با: $\tau = \dfrac{V}{A} = 0/15\dfrac{T}{A}$

۵- (۲)



تعادل قطعهٔ سمت راست

ابتدا باید دقت شود که در وجوه AB و CD، دو قطعه چوب می‌خواهند از یکدیگر دور شوند و تنشی بر یکدیگر وارد نمی‌کنند. با این توجیه و با بررسی تعادل در راستای افق داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma \times L' \times b = P$$

$$L'_{min} = \frac{P}{\sigma_{all} \times b} = \frac{20000}{200 \times 25} = 4\,cm$$

۶- (۲)

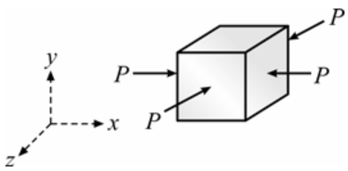
حالت هیدرواستاتیک: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P = -700\,Pa$, $V_0 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times 3 \times 25^3 = 62500\,cm^3$

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\times 0/3}{21\times 10^5} \times (-3\times 700) = -4\times 10^{-4}$$

$$\Delta V = \varepsilon_V \times V_0 = -4\times 10^{-4} \times 62500 = -25\,cm^3 = -25\times 10^{-6}\,m^3$$

۷- (۲)

در قسمت‌های AB و CD، هیچ‌گونه تنشی بر میلهٔ برنجی وارد نشده و تغییر طول این قسمت‌ها صفر است. از طرفی قسمت AD، تحت تنش هیدرواستاتیک P در دو راستای x و z قرار داشته و در راستای y تنشی بر المان‌های میله وارد نمی‌شود:



$$\sigma_x = \sigma_z = \sigma = -60\,MPa \;,\; \sigma_y = 0$$

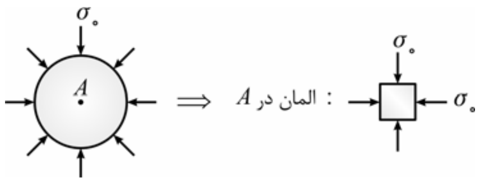
$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = -2\nu\frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_y = -2\times\frac{1}{3}\times\frac{(-60)}{100\times 10^3} = 40\times 10^{-5}$$

$$\Delta L_{BC} = \varepsilon_y \times L_{BC} = 40\times 10^{-5} \times 300\times 10^{-3} = 0/12\times 10^{-3}\,m$$

بنابراین تغییر طول میلهٔ BC، برابر $0/12\times 10^{-3}\,m$ است.

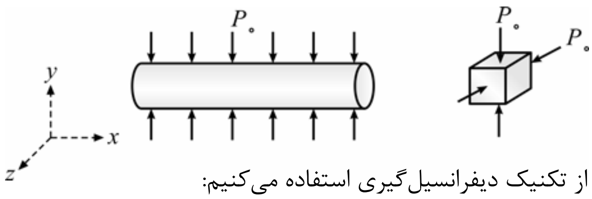
نکته: در دیسکی مطابق شکل مقابل که تنش فشاری σ در راستای شعاع دیسک بر آن وارد می‌شود، کلیهٔ المان‌های داخل دیسک تحت اثر تنش فشاری σ قرار می‌گیرند. این موضوع شبیه به قانون پاسکال در مکانیک سیالات است.



با همین استدلال، می‌توان ثابت کرد که اگر یک کره با شعاع R نیز تحت تنش‌های فشاری $\sigma_\circ$ عمود بر سطح کره قرار گیرد، تنش فشاری در هر نقطه از داخل کره برابر $\sigma_\circ$ است.

۸- (۴)

با توجه به نکتهٔ مطرح شده در تست قبل، تنش فشاری در راستاهای y و z برابر $P_\circ$ است و در راستای x بر میله تنشی وارد نمی‌شود.

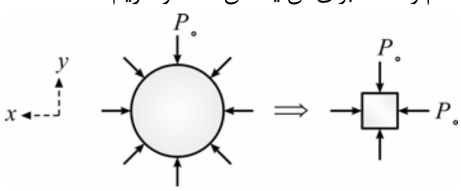


$$\sigma_x = \circ \ , \ \sigma_y = \sigma_z = -P_\circ$$

برای محاسبهٔ تغییر سطح جانبی استوانه، از تکنیک دیفرانسیل‌گیری استفاده می‌کنیم:

مساحت جانبی : $A = ۲\pi RL \ \Rightarrow \ \Delta A = ۲\pi L \Delta R + ۲\pi R \Delta L$

بنابراین برای محاسبهٔ تغییر سطح جانبی استوانه، نیاز به دانستن مقادیر ΔR و ΔL داریم. برای محاسبهٔ ΔR با توجه به تقارن کامل در راستای شعاع استوانه، کرنش در تمام راستاها برای آن یکسان است و داریم:



$$\varepsilon_z = \varepsilon_y = \varepsilon_R$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \frac{(-P_\circ)}{E} + \frac{(-P_\circ)}{E} = (\nu - ۱)\frac{P_\circ}{E}$$

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta R}{R} \ \Rightarrow \ \Delta R = \varepsilon_R \times R = (\nu - ۱)\frac{P_\circ}{E} R$$

از طرفی میزان تغییر طول استوانه عبارت است از:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \frac{(-P_\circ)}{E} - \nu \frac{(-P_\circ)}{E} = ۲\nu \frac{P_\circ}{E}$$

$$\Delta L = \varepsilon_x \times L = ۲\nu \frac{P_\circ}{E} L$$

بنابراین میزان تغییر سطح جانبی این استوانه برابر است با:

$$\Delta A = ۲\pi L \times (\nu - ۱)\frac{P_\circ}{E} R + ۲\pi R \times \left(۲\nu \frac{P_\circ}{E} L\right) = (۳\nu - ۱)۲\pi \frac{P_\circ}{E} RL$$

مرور و جمع‌بندی مقاومت مصالح

مقدمه

در آخرین بخش کتاب، می‌خواهیم با حل سؤالات کنکورهای سراسری، دکتری و تعدادی تست تألیفی مکمل، مقاومت مصالح را به بهترین شکل ممکن برای شما جمع‌بندی کنیم.

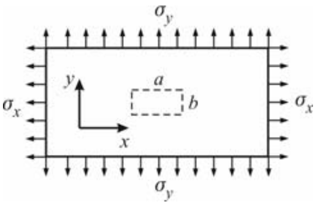
دقت: در جدول زیر، تعداد سؤالات مطرح شده از هر فصل درس مقاومت مصالح از سال ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۴ در کنکور سراسری کارشناسی ارشد آورده شده است تا با کمک آن، دید بهتری نسبت به اهمیت فصل‌ها داشته باشید:

شمارهٔ فصل	نام فصل	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴
۱	تنش - کرنش	۱	۱	۱	۲	۳
۲	تغییرشکل‌های محوری در اعضاء	۱	۲	۳	۲	۱
۳	پیچش	۲	۲	۲	۲	۲
۴	خمش الاستیک	۳	۲	۲	۳	۳
۵	بارگذاری عرضی	۲	۲	۲	۱	۱
۶	ترکیب تنش در اعضای سازه و مخازن جدار نازک	۱	۱	-	-	-

دقت: برای این‌که بتوانید مفاهیم ارائه شده در تست‌ها را در داخل کتاب نیز به راحتی پیدا کنید، در بسیاری از تست‌ها، به سؤالات و نکات داخل فصل‌ها نیز ارجاع داده شده است.

قسمت اول: سؤالات جمع‌بندی فصل اول

۱- پیش از اعمال تنش‌های σ_x و σ_y به صفحهٔ نازکی، مستطیلی به ابعاد a و b مطابق شکل بر روی آن علامت زده می‌شود. اگر مساحت مستطیل پس از اعمال تنش‌ها بدون تغییر بماند، کدام مورد صحیح است؟ (υ ضریب پواسون صفحه است و $\sigma_z = 0$) (سراسری - ۹۴)



۱) $a\sigma_x + b\sigma_y = 0$

۲) $\sigma_x + \sigma_y = 0$

۳) $\sigma_x - \sigma_y = 0$

۴) $\upsilon = \frac{1}{2}$

حل: ابتدا باید توجه کرد با توجه به اینکه تغییرمساحت مستطیل موردنظر ناشی از کرنش سطحی می‌باشد و در صورت عدم تغییرمساحت آن، کرنش سطحی صفر خواهد بود. با توجه به این موضوع خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \upsilon\dfrac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \upsilon\dfrac{\sigma_x}{E} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0 \Rightarrow \varepsilon_A = \frac{\sigma_x}{E} - \upsilon\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \upsilon\frac{\sigma_x}{E} = 0$$

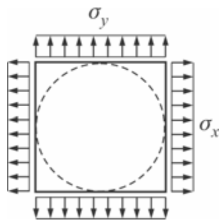
$$\Rightarrow \frac{\sigma_x(1-\upsilon)}{E} + \frac{\sigma_y(1-\upsilon)}{E} = 0 \Rightarrow \underbrace{(1-\upsilon)}_{A}\underbrace{(\sigma_x + \sigma_y)}_{B} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = (1-\upsilon) = 0 \Rightarrow \upsilon = 1 \\ B = \sigma_x + \sigma_y = 0 \end{cases}$$

ضریب پواسون در بازهٔ $0/5 > \upsilon > 0$ می‌باشد. (غ ق ق)

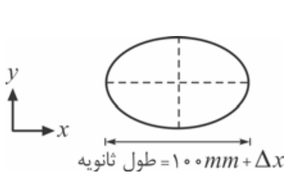
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲- صفحه‌ای نازک و مربع شکل به ابعاد $100\ mm \times 100\ mm$ مفروض است. دایره‌ای به قطر $100\ mm$ روی صفحه ترسیم شده است (دایرهٔ محاطی). اضلاع قائم و افقی صفحه به‌ترتیب تحت تنش‌های کششی $\sigma_x = 80\times10^6\ MPa$ و $\sigma_y = 40\times10^6\ MPa$ قرار می‌گیرند. اندازهٔ قطر بزرگ بیضی حاصل از تغییرشکل دایره چند میلی‌متر است؟ (مدول ارتجاعی $E = 60\times10^9\ GPa$ و ضریب پواسون $\upsilon = 0/25$ است.) (دکتری - ۹۲)



۱) ۱۰۰/۰۳۳ ۲) ۱۰۰/۱۱۷ ۳) ۱۰۰/۰۶۷ ۴) ۱۰۰/۱۳۳

حل: با توجه به اینکه تنش در راستای x (σ_x)، از تنش در راستای y بزرگ‌تر می‌باشد، تغییرشکل صفحه بعد از اعمال تنش به‌گونه‌ای است که پس از تغییرشکل، قطر بزرگ بیضی در راستای x است و خواهیم داشت:



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{100} \Rightarrow \Delta x = 100\,\varepsilon_x \quad , \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \upsilon\frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \upsilon\sigma_y)$$

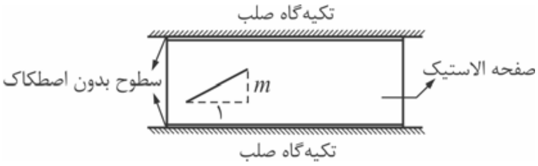
$$\varepsilon_x = \frac{1}{60\times10^9}(80\times10^6 - (0/25\times40\times10^6)) = \frac{7}{6}\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = 1/17\times10^{-3} \Rightarrow \Delta x = \varepsilon_x \times 100 = 0/117\ mm$$

$$\text{قطر بزرگ بیضی} = 100 + \Delta x = 100/117\ mm$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است. توجه شود که این سؤال، مشابه تست ۳۶ در صفحهٔ ۶۴ کتاب است.

۳- صفحه نازکی از مادۀ الاستیک طبق شکل بین سطوح بدون اصطکاک دو تکیه‌گاه صلب قرار گرفته است. در دمای $T_\circ$ صفحه بدون تنش است و خطی به شیب m بر روی آن علامت زده می‌شود. کدام مورد به شیب خط، پس از افزایش دمای ΔT در صفحه نزدیک‌تر است؟ (ضریب پواسون صفحه υ و $\alpha \Delta T << ۱$) (دکتری - ۹۴)



۱) $m[۱+\alpha \Delta T]$

۲) $m[۱-\alpha \Delta T]$

۳) $m[۱+(۱+\upsilon)\ \alpha \Delta T]$

۴) $m[۱-(۱+\upsilon)\ \alpha \Delta T]$

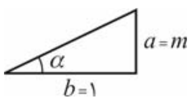
حل: با توجه به تکیه‌گاه‌های صلب می‌توان نتیجه گرفت کرنش در راستای قائم (y) برابر صفر است و داریم:

$$\varepsilon_y = ۰ \Rightarrow \frac{\sigma_y}{E} - \underbrace{\boxed{\frac{\upsilon \sigma_x}{E}}}_{\sigma_x = ۰ \ \text{(با توجه به آزاد بودن صفحه در جهت } x\text{)}} + \alpha \Delta T = ۰ \Rightarrow \sigma_y = -E\alpha\, \Delta T$$

در ادامه کرنش در راستای x برابر است با:

$$\varepsilon_x = \underbrace{\boxed{\frac{\sigma_x}{E}}}_{۰} - \frac{\upsilon \sigma_y}{E} + \alpha \Delta T = (۱+\upsilon)\alpha \Delta T$$

از طرفی شیب خط برابر تانژانت زاویۀ α می‌باشد، برای به‌دست آوردن شیب بعد از افزایش دما، با دیفرانسیل‌گیری از شیب خط، ابتدا تغییر شیب را به‌دست می‌آوریم:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \text{دیفرانسیل‌گیری از شیب خط} = \frac{\overset{a\times\varepsilon_y}{\boxed{\Delta a}} \times b - \overset{۱\times\varepsilon_x}{\boxed{\Delta b}} \times \overset{m}{\boxed{a}}}{b^۲}$$

$$\text{(تغییرات شیب)} \quad \text{دیفرانسیل شیب} = \frac{۰-(۱+\upsilon)\ \alpha \Delta T \times m}{۱}$$

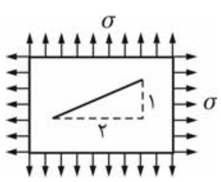
با به‌دست آوردن مقدار تغییرات شیب، می‌توان به‌صورت زیر شیب ثانویه را به‌دست آورد:

$$\text{شیب ثانویه} = \text{شیب اولیه} + \text{تغییرات شیب} = m + [-(۱+\upsilon)\ \alpha m \Delta T] = m[۱-(۱+\upsilon)\alpha \Delta T]$$

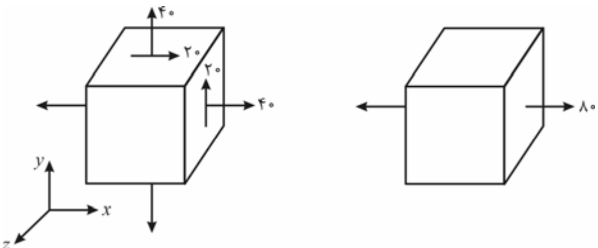
بنابراین گزینۀ (۴) صحیح است.

این تست جدید که در کنکور دکتری مطرح شده است، سؤال دشوار و جدیدی است که شانس طرح در کنکور سراسری را نیز دارد. توصیه می‌شود که برای تسلط بیشتر، تمرین زیر را نیز حل کنید.

تمرین: **در صفحۀ مقابل، دما را چقدر کاهش دهیم تا شیب خط نشان داده شده، تحت تنش‌های وارده تغییر نکند؟**



۴- در دو المان نشان داده شده، چه رابطه‌ای بین کرنش حجمی دو المان وجود دارد؟ (سراسری - ۹۳)



المان (۱)   المان (۲)

۱) $\varepsilon_{v_۱} = ۲\,\varepsilon_{v_۲}$

۲) $\varepsilon_{v_۱} = \varepsilon_{v_۲}$

۳) $\varepsilon_{v_۱} = ۱/۲\,\varepsilon_{v_۲}$

۴) $\varepsilon_{v_۱} = \frac{۱}{۲}\,\varepsilon_{v_۲}$

حل: برای مقایسهٔ کرنش حجمی در دو المان می‌توان نوشت:

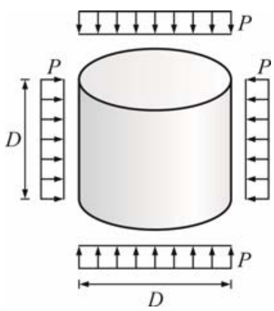
$$\begin{cases} (۱)\ \text{المان}: \sigma_x = ۴۰\ ,\ \sigma_y = ۴۰\ ,\ \sigma_z = ۰ \Rightarrow \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = ۴۰+۴۰+۰ = ۸۰ \\ (۲)\ \text{المان}: \sigma_x = ۸۰\ ,\ \sigma_y = ۰\ ,\ \sigma_z = ۰ \Rightarrow \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = ۸۰+۰+۰ = ۸۰ \end{cases}$$

با استفاده از رابطهٔ کرنش حجمی داریم:

$$\varepsilon_v = \frac{۱-۲\nu}{E}\underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{\text{در دو المان یکسان است.}} \Rightarrow \varepsilon_{v_۱} = \varepsilon_{v_۲}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است. دقت شود که این تست، عیناً نکتهٔ صفحهٔ ۲۵ کتاب بوده است.

۵- عضو استوانه‌ای شکل با قطر و ارتفاع D و مشخصات ماده برابر E و $\nu = ۰/۲۵$، تحت فشار همه جانبه P می‌باشد. تغییر حجم استوانه کدام است؟ (سراسری - ۹۱)



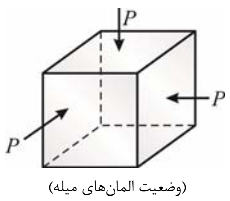
۱) $\frac{۹\pi D^۳ . P}{۸E}$

۲) $\frac{۳\pi D^۳ . P}{۸E}$

۳) $\frac{۹\pi D^۳ . P}{۱۶E}$

۴) $\frac{۳\pi D^۳ . P}{۴E}$

حل: همهٔ المان‌های میله در حالتی شبیه به حالت تنش هیدرواستاتیک قرار دارند و داریم:



(وضعیت المان‌های میله)

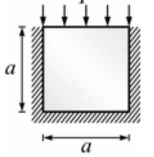
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P \quad , \quad \text{حجم اولیهٔ میله} = V_۰ = Ah = \frac{\pi D^۲}{۴} \times D$$

$$\varepsilon_V = \frac{۱-۲\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{۱-۲\times(۰/۲۵)}{E}(-۳P) = -۱/۵\frac{P}{E}$$

$$\Delta V = \varepsilon_V \times V_۰ = -۱/۵\frac{P}{E}\times\left(\frac{\pi D^۲}{۴}\times D\right) = -\frac{۳}{۸}\frac{\pi D^۳ P}{E}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است. دقت شود که این سؤال، مشابه تست ۶ واقع در صفحهٔ ۵۹ از کتاب است.

۶- مکعبی به ضلع a، در محفظه‌ای مطابق شکل قرار داده شده به طوری که تغییر طول آن فقط در جهت قائم امکان‌پذیر بوده و تحت فشار یکنواخت P برسطح فوقانی قرار گرفته است. تغییر طول ضلع قائم مکعب، کدام مقدار زیر است؟ (ν ضریب پواسون می‌باشد) (سراسری - ۹۰، دکتری - ۹۳)



۱) $\frac{P.a}{E}\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}$ ۲) $\frac{P.a}{E}\frac{1-\nu}{1+\nu^2}$

۳) $\frac{P.a}{E}\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}$ ۴) $\frac{P.a}{E}\frac{1-\nu-2\nu^2}{1+\nu^2}$

حل: برای به‌دست آوردن تغییر ضلع قائم، نیازمند به‌دست آوردن تنش در راستای قائم (مثلاً z) هستیم، که با توجه به روابط زیر، ابتدا تنش در راستاهای x و y را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\varepsilon_x = 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} = 0 \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma\end{cases} \Rightarrow\; \sigma = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z$$

و در ادامه با محاسبهٔ ε_z، تغییر طول ضلع قائم این مکعب برابر است با:

$$\begin{cases}\varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} + \dfrac{\sigma_z}{E} \\ \sigma_x = \sigma_y = \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_z\end{cases} \Rightarrow\; \varepsilon_z = \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\xrightarrow{\sigma_z = -P}\; \Delta h = \varepsilon_z \times a = -\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\frac{Pa}{E}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است. دقت شود که این سؤال، مشابه تمرین (۱-۱۲) در صفحهٔ ۲۱ کتاب بوده است.

۷- بر روی سطح دیواری مقادیر کرنش در دو امتداد متعامد برابر $\varepsilon_x = 0/0006$ و $\varepsilon_y = -0/0012$ اندازه‌گیری شده است. با فرض رفتار الاستیک خطی و اینکه بر روی سطح دیوار مزبور بار خارجی وارد نمی‌شود ($\sigma_z = 0$)، مقدار کرنش در جهت عمود بر سطح دیوار چقدر است؟ (ضریب پواسون برابر ۰/۲۵ و مدول ارتجاعی برابر ۲۰ MPa در نظر گرفته شود.) (سراسری - ۹۴)

۱) ۰/۰۰۰۴−   ۲) صفر   ۳) ۰/۰۰۰۲   ۴) ۰/۰۰۰۴

حل: رابطه کرنش در امتداد محور z (عمود بر محورهای x و y) به‌صورت زیر است و با توجه به صفر بودن تنش در امتداد محور z ها داریم:

$$\varepsilon_z = \frac{\overset{\to 0}{\boxed{\sigma_z}}}{E} - \upsilon\frac{\sigma_x}{E} - \upsilon\frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (1)$$

حال مقادیر σ_x و σ_y و در نهایت حاصل $\sigma_x + \sigma_y$ را به‌وسیلهٔ روابط زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \upsilon\dfrac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \upsilon\dfrac{\sigma_x}{E}\end{cases} \Rightarrow\; \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1-\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \;\Rightarrow\; \sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\upsilon}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \qquad (2)$$

جایگذاری (۲) در (۱) $\Rightarrow$ $\boxed{\varepsilon_z = -\dfrac{\upsilon}{1-\upsilon}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}$

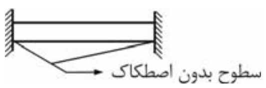
و در نهایت با قرار دادن مقادیر ارائه شده برای کرنش در صورت سؤال در رابطهٔ به‌دست آمده خواهیم داشت:

$$\varepsilon_z = -\frac{۰/۲۵}{۱-۰/۲۵}\,(۰/۰۰۰۶+(-۰/۰۰۱۲)) = ۰/۰۰۰۲$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است. دقت شود که این سؤال، مشابه تمرین (۱-۱۶) در صفحهٔ ۲۶ کتاب بوده است.

۸- میله‌ای استوانه‌ای مطابق شکل زیر، بین دو تکیه‌گاه در دمای $T_{۰}$ بدون نیروی محوری داخلی قرار گرفته است. اگر شعاع اولیهٔ میله $R_{۰}$ باشد، تغییر شعاع میله در اثر افزایش دمای ΔT کدام است؟ (E مدول الاستیسیته، υ نسبت پواسون، $G=\dfrac{E}{۲(۱+\upsilon)}$ مدول برشی و α ضریب انبساط حرارتی می‌باشند.)

(سراسری - ۹۴)



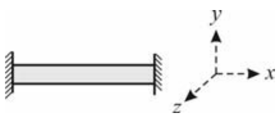
۱) $\dfrac{۲G}{E}\alpha\Delta TR_{۰}$

۲) $\dfrac{۲E}{G}\alpha\Delta TR_{۰}$

۳) $\dfrac{E}{۲G}\alpha\Delta TR_{۰}$

۴) $\dfrac{G}{۲E}\alpha\Delta TR_{۰}$

حل: با توجه به وجود تکیه‌گاه در دو طرف میله، با افزایش دمای ΔT کرنش در جهت طولی (x) در شکل زیر صفر می‌باشد و با توجه به آزاد بودن میله در راستاهای y و z، $\sigma_z=\sigma_y=۰$ است. در ادامه با توجه به رابطهٔ کرنش در حالتی‌که تغییر درجه حرارت وجود دارد خواهیم داشت:



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \upsilon\frac{\overset{\text{صفر}}{\boxed{\sigma_y}}}{E} - \upsilon\frac{\overset{\text{صفر}}{\boxed{\sigma_z}}}{E} + \alpha\Delta T = ۰$$

$$\Rightarrow\ \sigma_x = \overset{\text{تنش فشاری}}{\boxed{-}}\ E\alpha\Delta T$$

در ادامه برای محاسبهٔ تغییر شعاع میله، می‌توانیم از کرنش در امتداد شعاع میله یا همان y استفاده کنیم:

$$\varepsilon_y = \frac{\overset{\text{صفر}}{\boxed{\sigma_y}}}{E} - \upsilon\frac{\overset{-E\alpha\Delta T}{\boxed{\sigma_x}}}{E} - \upsilon\frac{\overset{\text{صفر}}{\boxed{\sigma_z}}}{E} + \alpha\Delta T = -\upsilon\left(\frac{-E\alpha\Delta T}{E}\right) + \alpha\Delta T = (۱+\upsilon)\alpha\Delta T$$

در نهایت با محاسبهٔ کرنش در جهت y، تغییرات شعاع برابر است با:

$$\varepsilon_R = \varepsilon_y = \frac{\Delta R}{R_{۰}} \Rightarrow \Delta R = R_{۰}\,\varepsilon_y = (۱+\upsilon)\alpha\Delta TR_{۰} \quad , \quad G = \frac{E}{۲(۱+\upsilon)} \Rightarrow (۱+\upsilon) = \frac{E}{۲G}$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار تغییر شعاع}}\ \Delta R = \underset{\text{جایگزین } (۱+\upsilon)}{\boxed{\frac{E}{۲G}}}\ \alpha\Delta TR_{۰}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

توصیه می‌شود که به‌عنوان تمرین، تغییر حجم میله و تغییر سطح آن را نیز محاسبه کنید.

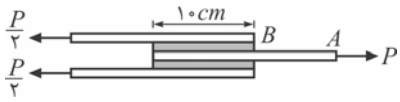
۹- دو لایهٔ لاستیکی به ابعاد $۱۰\times۱۰\times۲\,cm$ به سه ورق فولادی صلب متصل شده‌اند. ورق‌های فولادی مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. اگر $P=۱kN$ باشد، میزان تغییرمکان افقی نقطه A نسبت به B چند سانتی‌متر است؟ (ضخامت عمود بر صفحه $۱۰\,cm$ و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون لاستیک به‌ترتیب $E=۳\times۱۰^۶\,N/m^۲$ و $\upsilon=۰/۵$ است.) (دکتری - ۹۱)

۱) ۰/۱۵

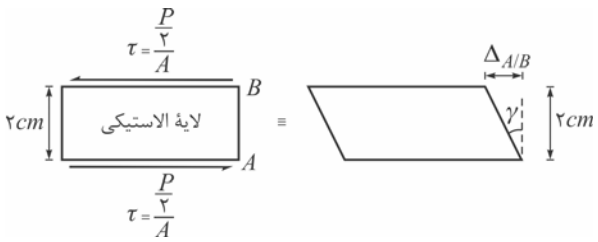
۲) ۰/۱

۳) ۰/۰۵

۴) ۰/۲



حل: اگر لایهٔ لاستیکی و تنش های برشی وارد بر آن را بررسی کنیم، ملاحظه می‌شود که تغییرشکل آن به‌صورت زیر است. لازم به ذکر است که با توجه به صلب بودن ورق‌های فولادی و عدم تغییرشکل آنها، تغییرمکان A نسبت به B، معادل با تغییرمکان پایین لایهٔ لاستیکی نسبت به بالای آن است:



$$\tau=\frac{\frac{P}{۲}}{\boxed{A}}=\frac{\frac{۱۰۰۰}{۲}\,N}{۰/۱\times۰/۱\,m^۲}=۵\times۱۰^۴\,N/m^۲$$

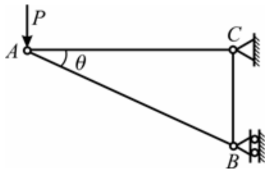
مساحت فصل مشترک ورق فولادی و لایهٔ لاستیکی

$$\gamma=\frac{\tau}{G}\ ,\ G=\frac{E}{۲(۱+\upsilon)}=\frac{۳\times۱۰^۶}{۲(۱+۰/۵)}=۱۰^۶\ \Rightarrow\ \gamma=\frac{۵\times۱۰^۴}{۱۰^۶}=۵\times۱۰^{-۲}$$

$$\tan\gamma=\gamma=\frac{\Delta_{A/B}}{۲}\ \Rightarrow\ \Delta_{A/B}=۲\underbrace{\boxed{\gamma}}_{۵\times۱۰^{-۲}}=۰/۱\,cm$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است. دقت شود که این سؤال، مشابه تست ۱۴ در صفحهٔ ۶۰ می‌باشد.

۱۰- در خرپای زیر چنانچه طول عضو AC برابر L باشد، جهت مینیمم شدن حجم میلهٔ AB، زاویهٔ θ چند درجه باید باشد؟ (سراسری - ۹۲)

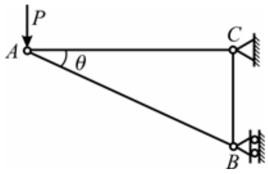


۱) $\frac{\pi}{۳}$

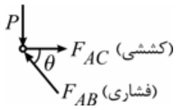
۲) $\frac{\pi}{۴}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۴}\sqrt{\pi}$



حل: با توجه به هندسهٔ سازهٔ نشان داده شده، نتیجه می‌شود که طول عضو مایل AB برابر با $\dfrac{L}{cos\,\theta}$ است و با توجه به تعادل گره A، نیروی عضو AB برابر $\dfrac{P}{sin\,\theta}$ و فشاری است. حال اگر تنش مجاز مصالح را برابر σ فرض کنیم، داریم:



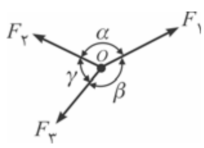
$$\sum F_y = \circ \;\Rightarrow\; F_{AB}\,sin\,\theta = P \;\Rightarrow\; F_{AB} = \frac{P}{sin\,\theta}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} \;\Rightarrow\; A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma_{AB}} \;\Rightarrow\; A_{AB} = \frac{P}{\sigma\,sin\,\theta}$$

$$AB \text{ حجم میلهٔ } = A_{AB} \times L_{AB} = \frac{P}{\sigma\,sin\,\theta} \times \frac{L}{cos\,\theta} = \frac{PL}{\sigma\,sin\,\theta\,cos\,\theta} = \frac{\text{۲}PL}{\sigma\,sin\,\text{۲}\theta}$$

با توجه به رابطهٔ فوق، مشاهده می شود که برای مینیمم شدن حجم میلهٔ AB، باید $sin\,\text{۲}\theta$ ماکزیمم شود که این اتفاق به ازای $\theta = \dfrac{\pi}{\text{۴}}$ می افتد و گزینهٔ (۲) صحیح است.

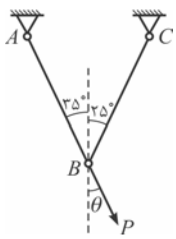
نکته کاربردی: ثابت می‌شود که اگر در شکل نشان داده شده، رابطهٔ زیر برقرار باشد، نقطهٔ O در حالت تعادل قرار دارد:



$$\frac{F_\text{۱}}{sin\,\gamma} = \frac{F_\text{۲}}{sin\,\beta} = \frac{F_\text{۳}}{sin\,\alpha}$$

رابطهٔ ارائه شده، **قضیهٔ سینوس‌ها** نام دارد. معمولاً زمانی‌که زوایای بین نیروها، از زوایای معروف مثلثاتی نباشد (مانند سؤال بعد)، قضیهٔ سینوس‌ها یک روش مناسب برای پیدا کردن ارتباط بین نیروها می‌باشد.

۱۱- در شکل زیر، دو کابل AB و BC با سطح مقطع و تنش مجاز یکسان تحت اثر نیروی P واقع شده‌اند. زاویه اعمال نیروی P چقدر باشد تا طرح اقتصادی باشد؟



۱) ۱۰ درجه

۲) ۵ درجه

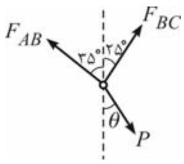
۳) صفر

۴) ۳۵ درجه

حل: این طرح هنگامی اقتصادی خواهد بود که میله‌های AB و BC، به‌طور همزمان به تنش مجاز برسند و به‌عبارتی رابطهٔ زیر برقرار شود:

$$\frac{\sigma_{AB}}{\sigma_{all}^{AB}} = \frac{\sigma_{BC}}{\sigma_{all}^{BC}} \;\Rightarrow\; \frac{\dfrac{F_{AB}}{A_{AB}}}{\sigma_{all}^{AB}} = \frac{\dfrac{F_{BC}}{A_{BC}}}{\sigma_{all}^{BC}} \xrightarrow[A_{AB} = A_{BC}]{\sigma_{all}^{AB} = \sigma_{all}^{BC}} F_{AB} = F_{BC}$$

برای محاسبهٔ نیروی اعضای AB و BC با استفاده از قضیه سینوس‌ها داریم:



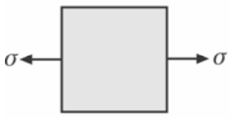
$$\frac{F_{AB}}{\sin(۱۸۰^\circ - ۲۵^\circ - \theta)} = \frac{F_{BC}}{\sin(۱۸۰^\circ - ۳۵^\circ + \theta)}$$
$$\Rightarrow \sin(۱۸۰^\circ - ۲۵^\circ - \theta) = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۵^\circ + \theta)$$
$$\Rightarrow ۱۸۰^\circ - ۲۵^\circ - \theta = ۱۸۰^\circ - ۳۵^\circ + \theta \Rightarrow ۲\theta = ۱۰^\circ \Rightarrow \theta = ۵^\circ$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

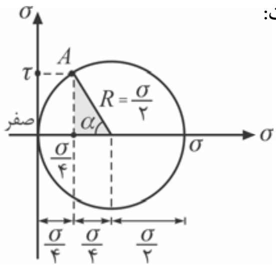
۱۲- میله‌ای تحت تنش تک محوره کششی σ قرار دارد. در صفحه‌ای که تنش عمودی در آن $\frac{\sigma}{۴}$ است، تنش برشی چقدر است؟ (دکتری - ۹۱)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}\sigma$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sigma$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}\sigma$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sigma$

حل: با رسم دایرهٔ مور برای المان تنش تک محوره در حالت کششی به‌صورت زیر و با فرض این‌که در صفحهٔ A وضعیت مورد نظر رخ می‌دهد، خواهیم داشت:



(المان تنش تک محوره)

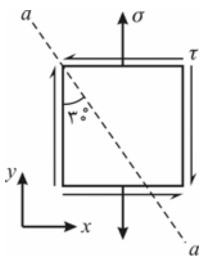


$$\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\frac{\sigma}{۴}}{\frac{\sigma}{۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\tau}{\frac{\sigma}{۲}} \Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\sigma$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۳- مؤلفه‌های تنش در نقطه‌ای از سازه در صفحهٔ xy، مطابق شکل می‌باشد. چنانچه صفحهٔ $(a-a)$ صفحه‌ای با تنش‌های اصلی حداقل باشد، نسبت $\left|\frac{\sigma}{\tau}\right|$ چقدر است؟ (سراسری - ۹۳)



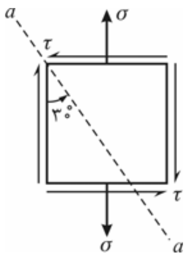
۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

حل: صفحهٔ $(a-a)$، صفحه‌ای با تنش‌های اصلی حداقل است و تنش برشی در آن صفر است و داریم:



$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲} sin ۲\theta + \tau_{xy} cos ۲\theta$$

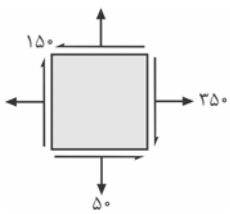
$$\sigma_x = ۰ , \sigma_y = +\sigma , \tau_{xy} = +\tau , \theta = ۳۰^\circ , \tau_\theta = ۰$$

$$۰ = \frac{۰-\sigma}{۲} \underbrace{\boxed{sin(۲\times(۳۰^\circ))}}_{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})} + (+\tau)\times \underbrace{\boxed{cos(۲\times(۳۰^\circ))}}_{(\frac{۱}{۲})}$$

$$\Rightarrow ۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۴}\sigma + \frac{۱}{۲}\tau \Rightarrow \left|\frac{\sigma}{\tau}\right| = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است. دقت شود که این تست، مشابه تمرین (۱-۱۹) در صفحهٔ ۳۱ و تمـرین (۱-۲۵) در صفحهٔ ۳۹ کتاب بوده است.

۱۴- وضعیت تنش در یک نقطه از جسمی به‌صورت زیر است (واحد تنش‌ها MPa). وضعیت اصلی تنش نسبت به وضعیت نشان داده شده با دوران .... درجه در جهت .... حاصل می‌شود. (دکتری - ۹۱)



۱) ۴۵+، پادساعتگرد

۲) ۴۵−، ساعتگرد

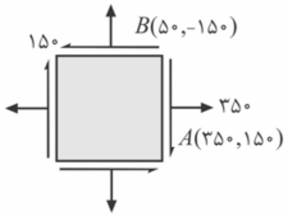
۳) ۲۲/۵+، پادساعتگرد

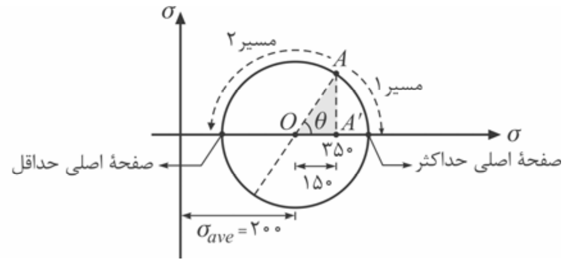
۴) ۶۷/۵+، پادساعتگرد

حل: با رسم دایرهٔ مور برای المان نشان داده شده، می‌توان دریافت که:

$$R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲})^۲ + \tau_{xy}^۲} = \sqrt{(\frac{۳۵۰-۵۰}{۲})^۲ + (۱۵۰)^۲} = ۱۵۰\sqrt{۲}\ MPa$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} = ۲۰۰\ MPa$$





$$cos\,\theta = \frac{OA'}{OA} = \frac{۱۵۰}{۱۵۰\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ$$

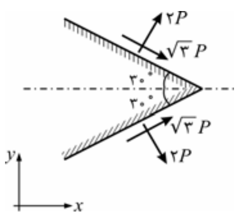
با توجه به محاسبهٔ θ در دایرهٔ مور، برای رسیدن از A به صفحات اصلی در المان، دو مسیر وجود دارد:

مسیر ۱: صفحهٔ A (یا کل المان) به اندازهٔ $\frac{\theta}{۲} = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵^\circ$ در جهت ساعتگرد بچرخد تا در وجه A، صفحهٔ اصلی حداکثر ظاهر شود.

مسیر ۲: صفحهٔ A (یا کل المان) به اندازهٔ $\frac{۱۸۰-\theta}{۲} = \frac{۱۸۰-۴۵}{۲} = ۶۷/۵^\circ$ در جهت پادساعتگرد بچرخد تا در وجه A، صفحهٔ اصلی حداقل ظاهر شود.

با توجه به گزینه‌ها و دو مقدار به‌دست آمده، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۵- تنش‌ها در یک نقطه از سازه بر روی دو صفحه مطابق شکل نشان داده شده است. مؤلفه‌های تنش بر روی صفحهٔ عمودی، کدام است؟ (سراسری - ۹۲)



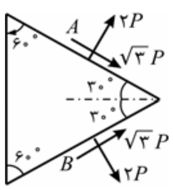
۱) $\sigma_x = ۵P$ و $\tau_{xy} = -P$

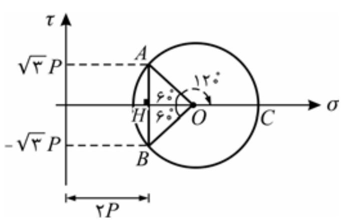
۲) $\sigma_x = ۵P$ و $\tau_{xy} = ۰$

۳) $\sigma_x = ۵P$ و $\tau_{xy} = P$

۴) $\sigma_x = ۸P$ و $\tau_{xy} = ۰$

حل: از دایرهٔ مور تنش استفاده می‌کنیم. توجه شود که با توجه به زاویه بین صفحات A و B در المان (۶۰°)، زاویه بین نقاط متناظر این صفحات در دایرهٔ مور تنش برابر است با $۲\times۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$ و دایره مور المان تنش داده شده به‌صورت زیر می‌باشد:





$$\begin{cases} \text{نقطهٔ } A: (\sigma = ۲P \quad , \quad \tau = +\sqrt{۳}P) \\ \text{نقطهٔ } B: (\sigma = ۲P \quad , \quad \tau = -\sqrt{۳}P) \end{cases}$$

$$sin\,۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AH}{OA} = \frac{\sqrt{۳}P}{R} \Rightarrow R = ۲P$$

$$\sigma_{ave} = \sigma_H + OH = ۲P + R\,cos\,۶۰ = ۲P + ۲P \times \frac{۱}{۲} = ۳P$$

با توجه به شکل سمت چپ در المان، برای رسیدن از صفحهٔ مورب به صفحهٔ قائم باید به میزان ۶۰ درجه در جهت ساعتگرد بچرخیم که نتیجه می‌شود نقطه متناظر صفحهٔ A بایستی در دایرهٔ مور المان تنش، به میزان ۱۲۰ درجه در جهت ساعتگرد بچرخد که با توجه به دایرهٔ مور فوق به نقطه C می‌رسیم که در آن تنش عمودی ماکزیمم و تنش برشی برابر صفر است و داریم:

$$\sigma_x = \sigma_C = \sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = ۳P + ۲P = ۵P \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_C = ۰$$

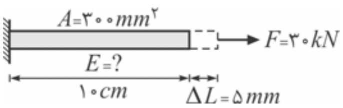
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است. دقت شود که این سؤال، مشابه تمرین (۱-۲۷) در صفحهٔ ۴۰ کتاب است.

قسمت دوم: سؤالات جمع‌بندی فصل دوم

۱۶- بر اثر اعمال نیروی کششی $۳۰\,kN$ به یک میلهٔ منشوری با سطح مقطع $۳۰۰\,mm^۲$ و طول $۱۰\,cm$، طـول آن به میزان ۵ میلی‌متر افزایش می‌یابد. مدول یانگ مصالح این میله برابر کدام گزینه است؟ (سراسری – ۹۲)

۱) $۲\times۱۰^۶\,N/mm^۲$ ۲) $۲\times۱۰^۳\,N/mm^۲$ ۳) $۲\times۱۰^۶\,N/mm^۲$ ۴) $۲\times۱۰^۳\,N/mm^۲$

حل: با توجه به تعریف تغییر طول در اعضای محوری، به‌صورت زیر می‌توان مدول یانگ (مـدول الاستیـسیته E) را به‌دست آورد:



$$\Delta L=\frac{FL}{AE}\ \Rightarrow\ E=\frac{FL}{A\,\Delta L}$$

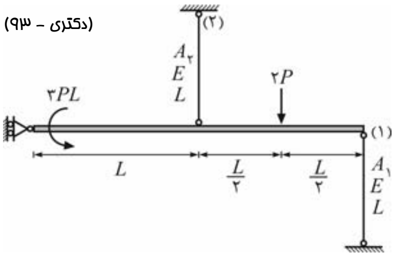
$$E=\frac{(۳۰\times۱۰^۳)\times۱۰۰}{۳۰۰\times۵}=\frac{۱۰^۴}{۵}=۲۰۰۰\ N/mm^۲\ =۲\times۱۰^۳\ N/mm^۲$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته: در مقاومت مصالح، گاهی انرژی کرنشی اعضای محوری مورد بحث قرار می‌گیرد، در میله‌ای بـه‌طـول L، مدول الاستیسیته E و سطح مقطع A، انرژی کرنشی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$U=\dfrac{F^۲L}{۲AE}$: انرژی کرنشی محوری

۱۷- در شکل نشان داده شده نسبت سطح مقطع میله ۱ به سطح مقطع میله ۲ $(\frac{A_۱}{A_۲})$ چقدر باشـد تـا انـرژی کرنشی هر دو میله با هم برابر شود؟ (دکتری – ۹۳)



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

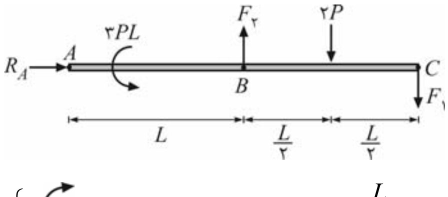
۳) ۱

۴) ۲

حل: با توجه به فرض سؤال، یعنی برابر قرار دادن انرژی کرنشی در دو میله خواهیم داشت:

$$U_۱=U_۲\ \Rightarrow\ \frac{F_۱^۲\,L}{۲EA_۱}=\frac{F_۲^۲\,L}{۲EA_۲}\ \Rightarrow\ \frac{A_۱}{A_۲}=(\frac{F_۱}{F_۲})^۲$$

در ادامه با بررسی جسم صلب و نوشتن رابطهٔ تعادل استاتیکی در این سـازهٔ معـین، نیـروی محـوری میلـه‌هـا را به‌دست می‌آوریم:



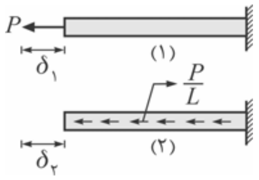
$$\begin{cases} +\circlearrowleft \sum M_B=۰\ \Rightarrow\ F_۱\times L+۲P\times\dfrac{L}{۲}-۳PL=۰\ \Rightarrow\ F_۱=۲P \\ \sum F_y=۰\ \Rightarrow\ F_۲=۴P \end{cases}$$

با جایگذاری مقدار نیروها در رابطهٔ به‌دست آمده، خواهیم داشت:

$$\frac{A_۱}{A_۲}=(\frac{۲P}{۴P})^۲=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

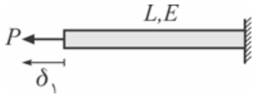
۱۸-میله‌ای به‌طول L، مدول ارتجاعی E و سطح مقطع A، در حالت (۱) تحت بار محوری متمرکز P در انتهای آزاد و در حالت (۲) تحت بار محوری گسترده به شدت $\frac{P}{L}$ قرار دارد. نسبت تغییرمکان محوری انتهای میله در حالت (۲) به حالت (۱) کدام است؟ (دکتری - ۹۲)



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

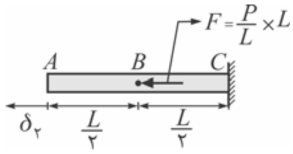
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

حل: با استفاده از رابطهٔ تغییرمکان تحت نیروهای محوری، در میلهٔ (۱) خواهیم داشت:



$$\delta_۱=\frac{PL}{AE}$$

از طرفی می‌دانیم که برای به‌دست آوردن تغییرمکان انتهای میله، می‌توان بار گسترده را در مرکز سطح بارگذاری به‌صورت متمرکز اعمال کرد و خواهیم داشت:



$$\delta_۲=\Delta_A=\Delta_C+\Delta_{B/C}+\Delta_{A/B}$$

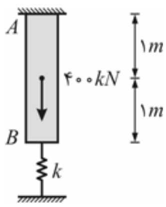
$$\delta_۲=۰+\frac{P(\frac{L}{۲})}{AE}+\frac{۰(\frac{L}{۲})}{AE}=\frac{PL}{۲AE}$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{\delta_۲}{\delta_۱}=\frac{\frac{PL}{۲AE}}{\frac{PL}{AE}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است. برای درک بهتر، به صفحهٔ ۱۱۵ کتاب مراجعه کنید.

۱۹- میلهٔ AB به طول $۲m$ از نقطهٔ A به تکیه‌گاه و در نقطهٔ B به یک فنر با سختی $k=۴\times۱۰^۹ N/m$ بسته شده است. اگر نیروی $۴۰۰kN$ به وسط این میله اعمال شود، تغییر طول میله برحسب متر چقدر خواهد بود؟
($۴\times۱۰^{-۲}m^۲$ = سطح مقطع میله و $۲۰۰GPa$ = ضریب الاستیسیتهٔ میله) (سراسری - ۹۱)



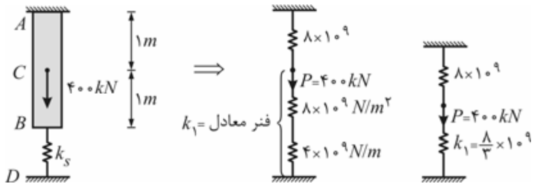
۱) ۱۰۰×۱۰^{-۶}

۲) ۲۵×۱۰^{-۶}

۳) ۵۰×۱۰^{-۶}

۴) صفر

حل: با توجه به روش مدلسازی با فنر داریم:



$$k_{AC}=k_{BC}=\frac{EA}{L}=\frac{۲۰۰\times ۱۰^{۹}\times ۴\times ۱۰^{-۲}}{۱}=۸\times ۱۰^{۹}\,N/m \quad , \quad k_{\text{فنر}}=۴\times ۱۰^{۹}N/m$$

(و k_s و BC سری هستند) $\Rightarrow\ k_1=\frac{۸\times ۴}{۸+۴}\times ۱۰^{۹}=\frac{۸}{۳}\times ۱۰^{۹}\,N/m$

فنرهای موازی : $F_1=\dfrac{\frac{۸}{۳}\times ۱۰^{۹}}{\frac{۸}{۳}\times ۱۰^{۹}+۸\times ۱۰^{۹}}\times ۴۰۰=۱۰۰\ kN=۱۰۰\times ۱۰^{۳}N$

$F_{\text{فنر}}=F_1=۱۰۰\times ۱۰^{۳}N$

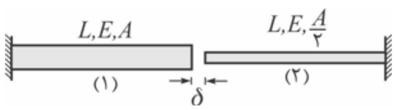
در نهایت با توجه به این‌که تغییر طول میله برابر Δ_B است، داریم:

$$\Delta L_{\text{فنر}}=\Delta_B=\frac{F_1}{k_s}=\frac{۱۰۰\times ۱۰^{۳}}{۴\times ۱۰^{۹}}=\frac{۱}{۴}\times ۱۰^{-۴}\,m=۲۵\times ۱۰^{-۶}\,m$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است. دقت شود که این سؤال، مشابه تمرین (۲-۱۹) واقع در صفحهٔ ۱۳۸ کتاب است.

تذکر: این سؤال را برای درک بهتر، با روش مدلسازی با تیر، مشابه تمرین (۲-۱۵) در صفحهٔ ۱۳۱ نیز حل کنید.

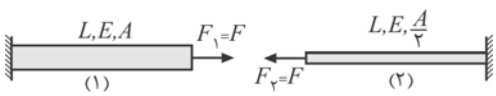
۲۰- میله‌های هم محور نشان داده شده در شکل زیر مفروض است. اگر انتهای آزاد آنها را که به میزان δ از هم فاصله دارند به یکدیگر متصل نماییم، نیروی محوری ایجاد شده در میله (۲) چقدر است؟ (دکتری - ۹۲)



۱) $\frac{AE\delta}{۳L}$ ۲) $\frac{AE\delta}{۲L}$

۳) $\frac{AE\delta}{L}$ ۴) $\frac{۲AE\delta}{۳L}$

حل: فاصلهٔ میان دو میله δ، برابر مجموع تغییرمکان هر دو میله پس از رسیدن به هم می‌باشد. با توجه به نامعین بودن سازه، بعد از اتصال در هر دو میله نیروی داخلی ایجاد می‌شود و خواهیم داشت:

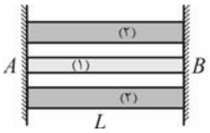


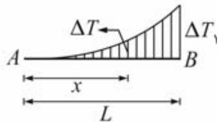
رابطهٔ سازگاری : $\Delta_1+\Delta_۲=\delta\ \Rightarrow\ \frac{F_1 L}{AE}+\frac{F_۲ L}{\frac{A}{۲}E}=\delta$

$$\xrightarrow{F_1=F_۲=F}\ \frac{FL}{AE}+\frac{۲FL}{AE}=\delta\ \Rightarrow\ F=\frac{AE\delta}{۳L}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است. این سؤال، نمونهٔ ساده شدهٔ تمرین (۲-۳۳) کتاب در صفحهٔ ۱۵۳ بوده است.

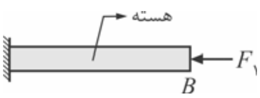
۲۱- مقطع مرکبی شامل هسته ۱ و پوسته ۲ به طول L بین دو تکیه‌گاه صلب قرار گرفته و به‌صورت غیریکنواخت تحت گرادیان حرارتی ΔT قرار می‌گیرد به‌طوری‌که در فاصله x از انتهای A افزایش حرارت با رابطهٔ $\Delta T(x)=\Delta T_1 \frac{x^2}{L^2}$ بیان می‌شود. چنانچه روابط زیر برای مشخصات پایهٔ دو جزء فرض شود، نسبت تنش $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ کدام است؟ ($E_2=E_1$ و $A_2=\frac{1}{2}A_1$ ، $\alpha_2=2\alpha_1$) (دکتری - ۹۴)





۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

حل: ایدهٔ اصلی این تمرین که ظاهر نسبتاً دشواری دارد، از تست ۹۰ در صفحهٔ ۱۷۹ گرفته شده که سؤال کنکور سراسری سال ۸۵ بوده است. در این تست تغییر طول هسته و پوسته صفر بوده و تنش در آنها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\Delta_B=0 \;\Rightarrow\; -\frac{F_1 L}{A_1 E_1}+\int_0^L \alpha_1\,\Delta T(x)\,dx=0$$

$$\sigma_1=\frac{F_1}{A_1}=\frac{E_1\alpha_1}{L}\int_0^L \Delta T(x)\,dx$$

از طرفی به‌طور مشابه برای محاسبهٔ تنش در پوسته نیز داریم:

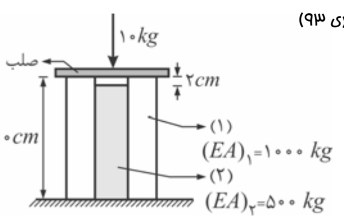
$$\sigma_2=\frac{E_2\alpha_2}{L}\int_0^L \Delta T(x)\,dx$$

و در نهایت در مقایسهٔ تنش در هسته و پوسته می‌توان نوشت (مقدار $\int_0^L \Delta T(x)\,dx$ و L در هسته و پوسته یکسان است):

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{E_1\alpha_1}{E_2\alpha_2}\;\xrightarrow[\alpha_2=2\alpha_1]{E_2=E_1}\;\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است. برای درک بهتر این سؤال، مطالعهٔ مثال (۳-۳۱) در صفحهٔ ۱۵۱ کتاب نیز بسیار مفید است.

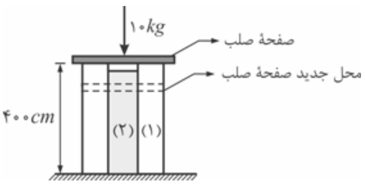
۲۲- در شکل زیر، غلاف لوله‌ای (۱) هسته (۲) را در برگرفته است. چنانچه هسته ۲ سانتی‌متر نسبت به غلاف کوتاه ساخته شده باشد، نیروی وارد بر کلاهک صلب به چه نسبتی بین آنها توزیع می‌شود؟ ($\frac{P_2}{P_1}=?$) (سراسری - ۹۴، دکتری ۹۳)



۱) صفر
۲) $\frac{1}{5}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{2}$

حل:

روش اول: فرض کنید که صفحهٔ صلب به میلهٔ (۲) یا همان هسته رسیده و میلهٔ (۲) را فشرده می‌کند (این موضوع در حل چنین سؤالاتی نقش کلیدی دارد). میزان پایین آمدن صفحهٔ صلب از یک سو برابر تغییر طول میلهٔ (۱) که هستهٔ بیرونی است بوده و از سوی دیگر برابر تغییر طول میلهٔ (۲) بـه عـلاوهٔ $۲cm$ اسـت. از طرفـی فرض می‌کنیم که نیروی $P_۱$ به هستهٔ خارجی و نیروی $P_۲ = ۱۰ - P_۱$ به هستهٔ داخلی رسـیده اسـت. بـا ایـن دو فرض، به‌سادگی نیروی دو میله به‌دست می‌آید:



$$(+)\downarrow \ \Delta L_۱ = \Delta L_۲ + ۲cm$$

$$\Rightarrow \ \frac{P_۱ \times ۴۰۰}{(۱۰۰۰\,kg)} = \frac{(۱۰ - P_۱) \times ۴۰۰}{(۵۰۰\,kg)} + ۲$$

$$\Rightarrow \ P_۱ = \frac{۲۵}{۳} \ , \ P_۲ = ۱۰ - P_۱ = \frac{۵}{۳} \ \Rightarrow \ \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{۱}{۵}$$

دقت: اگر پس از محاسبه، مقدار $F_۲$ عددی منفی به‌دست آمد، فرض اولیه نادرست بوده و صفحهٔ صلب به میلـهٔ وسط نمی‌رسد (در این تست این اتفاق رخ نداد). اگر این اتفاق رخ می‌داد، عملاً می‌توان فرض کرد که میلهٔ وسط وجود ندارد که حل سؤال بسیار ساده می‌شود.

روش دوم: نیروی $۱۰\,kg$ صفحه صلب را به سمت پایین حرکت می‌دهد. ابتدا باید بررسی شود کـه ایـن نیـرو در صورت عدم وجود هسته، کلاهک صلب را چقدر پایین می‌برد. چنانچه این مقدار کمتر از اختلاف فاصله غـلاف و هسته یعنی $۲\,cm$ باشد، نیرویی به هسته وارد نمی‌شود. تغییرمکان غلاف در اثر نیروی $۱۰\,kg$ برابر است با:

$$\delta \ \text{غلاف} = \frac{PL}{EA} = \frac{۱۰ \times ۴۰۰}{۱۰۰۰} = ۴\,cm > ۲\,cm$$

با توجه به اینکه تغییرمکان $۴\,cm$ بیشتر از حد فاصل غلاف و هسته می‌باشد کلاهک به هسته مـی‌رسـد. مقـدار نیروی لازم برای مماس کردن کلاهک به سطح هسته (بدون آن‌که آن را فـشار دهـد) معـادل بـا نیرویـی اسـت که $۲\,cm$ تغییرمکان در غلاف (۱) ایجاد کند و برابر است با:

$$\delta = ۲\,cm = \frac{FL}{EA} \ \Rightarrow \ \frac{F \times ۴۰۰}{۱۰۰۰} = ۲ \ \Rightarrow \ F = ۵\,kg$$

در ادامه می‌توان گفت نیروی باقیمانده $P' = ۱۰ - ۵ = ۵\,kg$ بین غـلاف و هـسته ماننـد دو فنـر مـوازی توزیـع خواهد شد. با توجه به اینکه تغییرمکان در محل کلاهـک بـرای هـسته و غـلاف یکـسان اسـت، غـلاف و هـسته به‌صورت دو فنر موازی رفتار می‌کنند بنابراین نیروی $۵\,kg$ به‌نسبت سختی بین آنها توزیع خواهد شد:

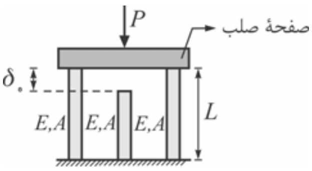
$$k = \frac{EA}{L} \ \Rightarrow \ k_۱ = \frac{(EA)_۱}{L} = \frac{۱۰۰۰}{۴۰۰} = ۲/۵ \quad , \quad k_۲ = \frac{(EA)_۲}{L} = \frac{۵۰۰}{۴۰۰} = ۱/۲۵$$

$$F_۱ = \frac{k_۱}{\sum k} \times P' = \frac{۲/۵}{۳/۷۵} \times ۵ = \frac{۱۰}{۳} \quad , \quad F_۲ = \frac{k_۲}{\sum k} \times P = \frac{۱/۲۵}{۳/۷۵} \times ۵ = \frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_۱ = ۵ + \frac{۱۰}{۳} = \frac{۲۵}{۳} \\ P_۲ = F_۲ = \frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow \ \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{۱}{۵}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲۳- در سازهٔ متقارن زیر، نیروی P در وسط یک صفحهٔ صلب که بر روی سه تکیه‌گاه الاستیک قائم قــرار دارد وارد می‌شود. هر سه تکیه‌گاه از مصالح یکسان ساخته شده و سطح مقطع مشابهی دارند و فقط تکیه‌گــاه وسط به اندازهٔ $\delta_\circ$ کوتاهتر از L است. اگر $\delta_\circ < \frac{\sigma_{all} L}{E}$ باشد، حداکثر نیروی مجاز P چقدر است؟ (σ_{all} تنش مجاز مصالح است) (دکتری - ۹۴)



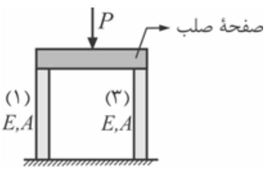
۱) $2\sigma_{all} A$

۲) $3\sigma_{all} A$

۳) $[3\sigma_{all} - \frac{\delta_\circ E}{L}] A$

۴) $3[\sigma_{all} - \frac{\delta_\circ}{L} E] A$

حل: با توجه به شرط $\delta_\circ < \frac{\sigma_{all} L}{E}$، ابتدا باید بررسی کنیم که صفحهٔ صلب به میلهٔ وسط می‌رسد یا خیر؟ برای این موضوع مشابه با روش دوم ارائه شده در تست قبل می‌گوییم اگر میلهٔ وسط وجود نداشته باشد، مقدار پــایین آمدن صفحهٔ صلب برابر است با (نیروی هر میله $\frac{P}{2}$):



$$\Rightarrow \quad \Delta_1 = \Delta_3 = \frac{\frac{P}{2} \times L}{AE} = \frac{P}{2A} \times \frac{L}{E} = \frac{\sigma L}{E}$$

$\frac{\sigma_{all} L}{E} =$ بیشترین مقدار پایین آمدن صفحهٔ صلب $\Rightarrow$ حداکثر مقدار σ، همان σ_{all} است.

با توجه به اینکه درز بین صفحهٔ صلب و میلهٔ وسط بزرگتر از $\frac{\sigma_{all} L}{E}$ است (صورت سؤال) صفحهٔ صلب در ایــن سؤال نمی‌تواند به میلهٔ وسط برسد و نیروی میلهٔ وسط صفر است و نصف نیروی P به هر یک از میله‌ها می‌رســد. در ادامه حداکثر مقدار P برابر است با:

$$\sigma = \sigma_{all} \;\Rightarrow\; \frac{\frac{P}{2}}{A} = \sigma_{all} \;\Rightarrow\; P_{max} = 2A\sigma_{all}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲۴- در تست قبل اگر $\delta_\circ < \frac{\sigma_{all} L}{E}$ باشد، حداکثر مقدار نیروی مجاز P چقدر است؟ (تألیفی)

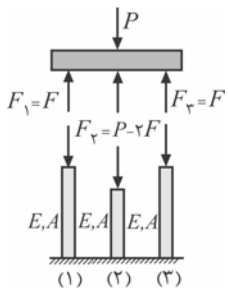
۱) $2\sigma_{all} A$

۲) $3\sigma_{all} A$

۳) $[3\sigma_{all} - \frac{\delta_\circ E}{L}] A$

۴) $3[\sigma_{all} - \frac{\delta_\circ}{L} E] A$

حل: برای حل این تمرین که مکمل بــسیار مناســبی بــرای دو تــست قبــل محــسوب می‌شود، مانند تست ۲۲ عمل کرده و با فرض اینکه در دو میلهٔ سمت چــپ و راســت نیروی F ایجاد می‌شود، به‌صورت زیر می‌نویسیم (دقت شــود کــه در ایــن حالــت، بــا توجه به سؤال قبل جسم صلب به میلهٔ وسط می‌رسد و در آن نیرو ایجاد می‌شود):



$$\begin{cases} \Delta_1 = \text{تغییرمکان صفحهٔ صلب} \\ \Delta_2 + \delta_\circ = \text{تغییرمکان صفحهٔ صلب} \end{cases}$$