مقدمه و راهنمای مطالعهٔ این کتاب:

از آنجاکه درس ریاضی عمومی ۱ و ۲ یکی از سرفصل‌های اصلی آزمون‌های ورودی کارشناسی ارشد و دکتری رشته‌های فنی مهندسی است، اگر کسب نمره بالا در سال‌های قبل یک مزیت محسوب می‌شد، در حال حاضر یک ضرورت است. با توجه به افزایش رقابت بین داوطلبان برای ورود به دانشگاه‌های برتر کشور، نه تنها لازم است که سرمایه‌گذاری کافی از لحاظ زمانی برای کسب موفقیت در این رقابت انجام شود، بلکه انتخاب راهبرد مناسب در نوع مطالعه و انتخاب مطالبی که خوانده می‌شوند، از آن مهمتر است. پس در حال حاضر مطالعه هدفمند و استفاده از زمان اهمیت زیادی دارد.
اکثر داوطلبان متقاضی ورود به مقطع کارشناسی ارشد و دکتری به‌دلایلی همچون اشتغال، تعداد زیاد مواد امتحانی، دانشجو بودن و غیره، زمان بسیار محدودی دارند. تلاش ما در نگارش این کتاب کاهش زمان مطالعه داوطلب و همچنین آموزش بهینه نکات و تست‌های درس ریاضی عمومی ۱ و ۲ بوده است. این کتاب با رویکرد پوشش تمامی نکات ریاضی عمومی ۱ در قالب ۳۰۰ تست منتخب از سؤالات آزمون‌های سال‌های اخیر نگارش شده است، که ۱۵۰ تست آن بیانگر نکته خاصی است و ۱۵۰ تست بعدی، تکمیل‌کننده تست اول هستند و برای تثبیت یادگیری تست‌ها، تمرین خوبی محسوب می‌شوند.
در ابتدای هر فصل یک نمودار درختی از مفاهیم آن آورده شده، که پیشنهاد می‌شود برای ایجاد چارچوب ذهنی مناسب، با دقت مطالعه شود. سپس با شروع فصل تیترهای اصلی براساس این نمودار درختی معرفی شده‌اند و برای هر قسمت یک معرفی کوتاه آمده است و در ادامه، تست الگو (تستی که نکته بعد از خود را معرفی می‌کند و با شماره فرد و تیتر آبی نشان داده شده) با پاسخ کاملاً تشریحی آمده است، بعد نکته تست بیان می‌شود و سپس تست با شماره زوج و تیتر مشکی می‌آید که برای تثبیت تست قبلی و نکته مربوط به آن است و پاسخ مربوط به آن لزوماً تشریحی نیست و در حدی است که خواننده را برای حل سؤال راهنمایی کند (هر چند در آن سوالاتی که احتمال داده شده که نکته‌ای در حل داشته باشد و خواننده ممکن است با آن برخورد کند، پاسخ تست تشریح شده است).
پیشنهاد می‌شود پیش از مطالعه تست‌ها و نکات این کتاب، پیش زمینه‌ای در مفاهیم اساسی با مطالعه کتاب‌های درسی ایجاد کنید و از این کتاب برای جمع‌بندی استفاده شود.
در صورتی‌که در مطالعه کتاب با مشکلی برخورد کردید یا پیشنهادی در رابطه با بهبود روند کتاب دارید، می‌توانید از یکی از راه‌های زیر با مؤلف یا ناشر در ارتباط باشید:
سایت انتشارات سری عمومی: www.serieomomi.ir
سایت شخصی مؤلف: www.shokrzad.com

در آخر از زحمات تمامی دوستانی که دلسوزانه در نگارش این کتاب کمک رساندند، از جمله آقایان دکتر آهنگر، دکتر فرقانی، مهندس محمد شکرزاد، مهندس حامد معافی و سرکار خانم نجفی صمیمانه تشکر داشته و این کتاب را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

رضا شکرزاد

فهرست

فصل اول: حد، پیوستگی و مجانب

بخش اول: حد توابع ۶
بخش دوم: پیوستگی توابع ۱۸
بخش سوم: مجانب‌ها ۲۲

فصل دوم: مشتق و کاربردهای مشتق

بخش اول: مشتق‌پذیری ۲۸
بخش دوم: دسته‌بندی مشتق توابع ۳۱
بخش سوم: مشتق مراتب بالاتر ۴۶
بخش چهارم: کاربردهای مشتق ۴۸

فصل سوم: انتگرال و کاربردهای آن

بخش اول: روش‌های انتگرال‌گیری ۷۰
بخش دوم: قضایای انتگرال‌های معین ۸۸
بخش سوم: انتگرال‌های ناسره ۹۵
بخش چهارم: کاربردهای انتگرال ۱۰۳

فصل چهارم: مختصات قطبی

بخش اول: مفاهیم اساسی ۱۲۰
بخش دوم: منحنی‌های خاص قطبی ۱۲۳
بخش سوم: محاسبه مساحت محصور به منحنی‌های قطبی ۱۲۶
بخش چهارم: کاربردهای انتگرال در مختصات قطبی ۱۳۰

فصل پنجم: اعداد مختلط

بخش اول: فرم عمومی اعداد مختلط ۱۳۴
بخش دوم: مکان هندسی در دستگاه مختلط ۱۳۷
بخش سوم: فرم قطبی اعداد مختلط ۱۳۹
بخش چهارم: توابع مختلط ۱۴۵

فصل ششم: دنباله و سری

بخش اول: دنباله‌ها ۱۴۸
بخش دوم: وضعیت همگرایی سری‌ها ۱۵۱
بخش سوم: شعاع و بازه همگرایی سری‌های توانی ۱۵۷
بخش چهارم: سری توابع غیرجبری ۱۶۱

پیوست (روابط کاربردی) ۱۷۴

سری عمومی

فصل اول:

حد، پیوستگی و مجانب

مروری بر آنچه خواهیم خواند:

با توجه به اینکه از این فصل یک یا دو تست در آزمون کارشناسی ارشد اکثر رشته‌ها در سال‌های اخیر مطرح شده است، حدود ۱۰درصد از تعداد سوالات این کتاب را به این فصل اختصاص داده‌ایم. مهم‌ترین سرفصل‌های این فصل، حالات **مبهم** $\frac{0}{0}$ و 1^{∞} و مبحث **پیوستگی در نقطه** است که در آزمون‌های سال‌های اخیر بیشترین تعداد تست را داشته‌اند.

- حد، پیوستگی و مجانب
  - حد
    - محاسبه جداگانه حد چپ و راست
    - حالات مبهم
      - $\frac{0}{0}$
      - $\frac{\infty}{\infty}$
      - $0\times\infty$
      - $\infty-\infty$
      - $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$
  - پیوستگی
    - پیوستگی تابع در نقطه
    - پیوستگی تابع دیریکله
    - نقاط انفصال توابع محدودیت‌دار
  - مجانب
    - مجانب قائم
    - مجانب افقی
    - مجانب مایل

بخش اول: حد توابع

الف) محاسبه جداگانه حد چپ و راست

در محاسبه برخی از حدود، لازم است که حد چپ و راست در نقطه مورد نظر، جداگانه محاسبه شود.*

تمرین ۱ **

حاصل $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}\sin x$ کدام است؟ (ژئوفیزیک – ۹۱)

۱) 0 ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) حد مذکور موجود نیست.

حل: اولین گام در محاسبه حد یک تابع، جایگذاری نقطه موردنظر به‌جای متغیرهای تابع است. در این سؤال با جایگذاری $x=0$، مخرج تابع $\frac{1}{x}$ صفر می‌شود، پس یک محدودیت حدی اتفاق افتاده و نیاز به محاسبه حد چپ و راست اطراف نقطه صفر به صورت جداگانه است.

$$\text{حد راست}:\ \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}\sin x \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}\times x = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

که با انتخاب تغییرمتغیر $t=\frac{1}{x}$ $(x\to 0^+ \Rightarrow t=\frac{1}{x}\to +\infty)$ و براساس قانون رشد توابع، رفع ابهام می‌شود.

$$\text{حد راست}:\ \lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t} \overset{\text{رشد } e^t \text{ از } t \text{ بیشتر است}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \frac{+\infty}{\text{عدد}} = +\infty$$

یک تعبیر برای درک بهتر قانون رشد

$$\text{حد چپ}:\ \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}\sin x \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}\times x = e^{-\infty}\times 0 = 0\times 0 = 0$$

حدود چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع در نقطه صفر حد ندارد.

گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکات

۱) در صورتی لازم است حد چپ و راست یک تابع را جداگانه محاسبه نماییم که حد تابع اطراف نقطه‌ای سؤال شود که آن نقطه نقش **محدودیت حدی** داشته باشد.

۲) محدودیت حدی در ۶ حالت اتفاق می‌افتد: در توابع **کسری** هرگاه x به سمت ریشه مخرج میل کند، در توابع شامل **قدرمطلق**، **رادیکال فرجه زوج** و **لگاریتم** زمانی که x به سمت ریشه عبارت تحت این توابع میل کند، در توابع شامل **جزءصحیح** زمانی که x به سمت عددی میل کند که عبارت درون براکت عدد صحیح شود و در نهایت در توابع **چندضابطه‌ای**، زمانی که x به سمت عدد مرزی میل کند.

---

* در این کتاب، در ابتدای هر زیرفصل یک توضیح مقدماتی (تنها برای معرفی زیرفصل) آورده می‌شود، سپس یک تست هدفدار مطرح می‌شود و آموزش زیر فصل و نکات خاص مربوط به آن بعد از این تست در قالب نکته ارائه می‌گردد.

** این کتاب شامل ۳۰۰ تست هدفدار از مهمترین، پرتکرارترین و نکته‌دارترین تست‌های کنکورهای سال‌های اخیر است. ۱۵۰ تست به‌عنوان تست اصلی (تمرین‌های با تیتر آبی) موضوع را معرفی می‌کنند و ۱۵۰ تست مکمل (تمرین‌های مشخص شده با رنگ مشکی) موضوع را تفهیم می‌کنند.

تمرین ۲

حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۳)

۱) $\dfrac{3}{5}$ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{1}{3}$ ۴) حد موجود نیست.

راهنمایی[**] چون $x=0$ ریشه مخرج کسر $\dfrac{1}{x}$ است و محدودیت حدی محسوب می‌شود، باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} \text{حد راست}: \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{\text{پرتوان}^*}{\sim} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}} = 1 \\ \text{حد چپ}: \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1+\cancel{2^{-\infty}}}{3+\cancel{2^{-\infty}}} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{حد چپ} \neq \text{حد راست}} \text{تابع اطراف صفر حد ندارد.}$$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

ب) حالت مبهم حدی

در محاسبه برخی از حدود توابع به جواب‌هایی می‌رسیم که ابهام دارند. حالات $\dfrac{0}{0}$ و $\dfrac{\infty}{\infty}$ معروف به حالات مبهم مقدماتی و حالات $0\times\infty$، $\infty-\infty$، 0^0، ∞^0 و 1^∞ معروف به حالات مبهم مرکب هستند.

رفع ابهام حالت مبهم $\dfrac{0}{0}$

یکی از حالات مبهم حدی که در توابع کسری به فرم $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ اتفاق می‌افتد، حالت $\dfrac{0}{0}$ است، که روش‌های رفع ابهام آن، **هم‌ارزی‌های اطراف صفر** و **هوپیتال** است.

تمرین ۲

مقدار $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{(b^x)}-a}{a^x-1}$ کدام است؟ $(a,b>0)$ (ژئوفیزیک - ۹۴)

۱) $\dfrac{1}{a}\ln b$ ۲) $a\ln b$ ۳) $\dfrac{1}{b}\ln a$ ۴) $b\ln a$

---

* در وادی بی‌نهایت، هر عبارت هم‌ارز با جمله‌ای از آن است که رشد بیشتری دارد که در این کتاب با هم‌ارزی پرتوان بیان می‌شود.

** برای درگیر کردن داوطلبان عزیز با مسائل، پاسخ سؤالات مشخص شده با تیتر مشکی (سؤالات شماره زوج) را به‌صورت راهنمایی آورده‌ایم. (هر چند در برخی از سؤالات که احتمال داده‌ایم در حل آنها نکات خاصی وجود داشته باشد، حل کامل‌تری ارائه کرده‌ایم.)

حل: با جایگذاری نقطه $x=0$ در تابع موردنظر به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، برای رفع ابهام آن از روش هوپیتال (که مشتق صورت را در صورت و مشتق مخرج را در مخرج قرار می‌دهیم) استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{(b^x)}-a}{a^x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{b^x(\ln b)\,a^{b^x}\ln a-0}{a^x\ln a}=a\ln b$$

در حل این سؤال از مشتق تابع $y=a^u$ که به فرم $y'=u'a^u\ln a$ است، استفاده کردیم.

گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکات

۱) از روش هوپیتال تنها برای رفع ابهام حالات مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ استفاده می‌کنیم.

۲) بهترین روش رفع ابهام این دو حالت، هوپیتال است مگر آن‌که هم‌ارزی توابع تحت حد سریع‌تر یا به راحتی به ذهن برسند یا هوپیتال دچار یک حلقه تکراری بی‌پایان شود.

تمرین ٤

مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$ برابر است با: (مکانیک - ۸۶)

۱) $-e$ ۲) -2 ۳) -1 ۴) 2

راهنمایی: با توجه به رابطهٔ مشتق‌گیری از تابع $(\frac{d(x^x)}{dx}=x^x(1+\ln x))$*، برای رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$، باید دو بار از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\text{حد داده شده}\xrightarrow{HoP}\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)-1}{-1+\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HoP}\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)^2+x^x(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}}=-2$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین ۵

حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(1-x)}{\sin^2 x}$ کدام است؟ (آمار - ۹۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ∞

حل: با جایگذاری نقطه موردنظر در عبارت به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، که برای رفع ابهام آن از روش هم‌ارزی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(1-x)}{\sin^2 x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\ln(1+u)\overset{u\to 0}{\sim}u}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\cancel{x}}{x^2}=\text{هم‌ارزی اشتباه است}$$

* برای محاسبه مشتق تابع $y=x^x$ باید قبل از مشتق‌گیری از طرفین رابطه لگاریتم بگیریم که در فصل مشتق به آن اشاره می‌شود.

چون جمله هم‌ارز حذف شد، هم‌ارزی اشتباه است و باید در بسط مک‌لورن عبارت، یک جمله اضافه‌تر بنویسیم.

$$\xrightarrow{\text{سری مک لورن}: \ ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots} \sim \lim_{x \to 0} \frac{x + (-x - \frac{x^2}{2})}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

گزینهٔ (۱) صحیح است.

نکات

۱) در استفاده از هم‌ارزی، هرگاه جمله هم‌ارز با جملات دیگر حذف شود، هم‌ارزی اشتباه است و باید روش حل را عوض کنیم. در این حالت اگر از سری مک‌لورن استفاده می‌کنیم، باید یک جمله بیشتر از قبل، از سری تابع بنویسیم.

۲) در نوشتن بسط مک‌لورن توابع تحت عبارت کسری، سری را تا درجه‌ای باز می‌کنیم که صورت و مخرج کسر هم‌مرتبه شوند. مثلاً در تست۵ مخرج درجه۲ است پس باید می‌فهمیدیم که سری صورت را باید تا درجه۲ بنویسیم.

۳) در فصل حد، سری مک‌لورن ۵ تابع زیر را بدانیم کفایت می‌کند و سری سایر توابع را در فصل دنباله و سری معرفی می‌کنیم.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

۴) هم‌ارزی‌های زیر که از سری توابع به‌دست آمده را به‌خاطر بسپارید:

$$\begin{matrix} \sin u & \tan u & \sinh u & \tanh u & & \\ \sin^{-1} u & \tan^{-1} u & \sinh^{-1} u & \tanh^{-1} u & \overset{u\to 0}{\sim} & u \\ e^u - 1 & \ln(1+u) & & & & \end{matrix}$$

و

$$1 - \cos u \overset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$$

تمرین ۶

حاصل $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)(2^x - 1)}{(\arcsin x)^2}$ کدام است؟ (مکانیک – ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}\ln 2$ ۲) $\ln 2$ ۳) $2\ln 2$ ۴) $(\ln 2)^2$

راهنمایی: عبارت $(2^x - 1)$ با توجه به هم‌ارزی $(a^u - 1) \overset{u\to 0}{\sim} u\ln a$، هم‌ارز با $x\ln 2$ است. هم‌ارزی دو عبارت لگاریتمی و معکوس مثلثاتی را نیز بر اساس نکتهٔ (۴) به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\text{حد داده شده} \sim \lim_{x \to 0} \frac{(x)(x\ln 2)}{x^2} = \ln 2$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین ۷

مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - xe^{x^2}+\dfrac{7x^3}{6}}{\sin^2 x\sin(x^3)}$ کدام است؟ (عمران - ۹۴)

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) $-\dfrac{59}{120}$ ۳) $\dfrac{1}{120}$ ۴) $\dfrac{61}{120}$

حل: با جایگذاری $x=0$ در تابع، حد مورد نظر به حالت مبهم $\dfrac{0}{0}$ می‌رسد. چون هم‌ارز دو تابع سینوسی در مخرج، یک عبارت درجه ۵ تولید می‌کند، پس بر اساس نکته (۲) تست ۵، باید سری توابع عبارت صورت را تا درجه ۵ بنویسیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^{x^2}+\frac{7x^3}{6}}{\sin^2 x\sin(x^3)}=\frac{0}{0}\overset{\text{سری مک‌لورن}}{\sim}\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}^{\sin x\ \text{سری}}-x\overbrace{(1+x^2+\frac{x^4}{2!})}^{e^{x^2}\ \text{سری}}+\frac{7x^3}{6}}{(x^2)(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cancel{x}-x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{7x^3}{6}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{59}{120}x^5}{x^5}=-\frac{59}{120}$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین ۸

مقدار حد $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x^2}$ کدام است؟ (مواد - ۸۹)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) ∞

راهنمایی: با توجه به رابطه $\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x^2=\cot^{-1}x^2=\tan^{-1}\dfrac{1}{x^2}$، ابتدا عبارت مخرج را ساده می‌کنیم، سپس با کمک هم‌ارزی‌های (e^u-1) و $\tan^{-1}u$ در اطراف صفر که برابر u می‌شوند، صورت و مخرج را ساده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\tan^{-1}(\frac{1}{x^2})}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=1$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

تمرین ۹

فرض کنید $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$، در این صورت مقدار a و b به‌ترتیب کدام است؟ (نساجی - ۹۰)

۱) $-\dfrac{7}{2}$ ، $-\dfrac{9}{2}$ ۲) $-\dfrac{5}{2}$ ، $-\dfrac{3}{2}$ ۳) $-\dfrac{3}{2}$ ، $\dfrac{3}{2}$ ۴) $\dfrac{3}{2}$ ، $-\dfrac{3}{2}$

حل: با توجه به این که حاصل حد موردنظر عدد ۱ شده است، می‌توان فهمید که درجه صورت با درجه مخرج برابر بوده و متغیرهای صورت و مخرج همدیگر را ساده کرده‌اند، پس چون درجه مخرج ۳ است، سری توابع عبارت صورت را تا درجه‌ای می‌نویسیم که توان ۳ تولید شود. سپس a و b را چنان انتخاب می‌کنیم که در صورت کسر یک تابع درجه ۳ با ضریب ۱ بماند.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+a\cos x)-b\sin x}{x^۳}=۱ \xrightarrow{\text{سری مکلورن}} \lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+a(۱-\frac{x^۲}{۲!}))-b(x-\frac{x^۳}{۳!})}{x^۳}=۱$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x+ax-\frac{ax^۳}{۲}-bx+\frac{bx^۳}{۶}}{x^۳}=۱ \xrightarrow{\text{باید در صورت کسر}} \begin{cases} x \text{ مجموع ضرایب}: ۱+a-b=۰ \\ x^۳ \text{ مجموع ضرایب}: -\frac{a}{۲}+\frac{b}{۶}=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}, b=-\frac{۳}{۲}$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین ۱۰

هرگاه $\lim_{x\to ۰}\frac{e^{ax}-e^{x}-۲ax}{x^۲}=۰$، آنگاه: (علوم دریایی - ۹۳)

۱) $a=-۱$ ۲) $a=۰$ ۳) $a=۱$ ۴) $a=۲$

راهنمایی: چون حاصل کسر صفر شده است، پس باید درجه صورت حداقل یک واحد بیشتر از درجه مخرج باشد، تا با جایگذاری $x=۰$ حاصل کسر صفر شود. بنابراین سری دو تابع نمایی صورت را تا درجه ۳ می‌نویسیم (چون مخرج درجه ۲ است).

$$\text{حد داده شده} \xrightarrow{\text{سری صورت}} \lim_{x\to ۰}\frac{\overbrace{۱+ax+\frac{a^۲x^۲}{۲!}+\frac{a^۳x^۳}{۳!}}^{e^{ax}\text{ سری}}\overbrace{-۱-x-\frac{x^۲}{۲!}-\frac{x^۳}{۳!}}^{-e^{x}\text{ سری}}-۲ax}{x^۲}=۰$$

اگر قرار باشد حاصل کسر فوق صفر شود، باید a را چنان انتخاب کنیم که جملات درجه ۱ و ۲ از بین بروند و تنها جمله درجه ۳ در صورت کسر باقی بماند.

$$\begin{cases} x \text{ مجموع ضرایب}: a-۱-۲a=۰ \Rightarrow a=-۱ \\ x^۲ \text{ مجموع ضرایب}: \frac{a^۲}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow a=\pm ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب مشترک}} a=-۱$$

گزینهٔ (۱) صحیح است.

رفع ابهام حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و هم‌ارزی‌های در بی‌نهایت

از حالات مبهم در حد توابع کسری، $\frac{\infty}{\infty}$ است که روش‌های رفع ابهام آن استفاده از هم‌ارزی‌های وادی بی‌نهایت و هوپیتال است.

تمرین ۱۱

مقدار $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{n^{2}}{2n+1}\sin\frac{\pi}{n}$ کدام است؟ (مکاترونیک - ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) ∞

حل: با توجه به اینکه $n\to\infty$ می‌رود، پس $\frac{\pi}{n}\to 0$ میل می‌کند و $\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}$ می‌شود و بر اساس هم‌ارزی پرتوان صورت و مخرج داریم:

$$\text{حد داده شده} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2}}{2n+1}\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{\text{پرتوان}}{\sim} \lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^{2}}{2n^{2}}=\frac{\pi}{2}$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته ۵ هم‌ارزی زیر، هم‌ارزی‌های مهم وادی بی‌نهایت هستند:

هم‌ارزی جبری: $ax^{n}+bx^{n-1}+\cdots+c \underset{\text{پرتوان}}{\overset{x\to\infty}{\sim}} ax^{n}$ (هم‌ارزی پرتوان)
قانون رشد توابع: لگاریتمی < رادیکالی < جبری < نمایی < فاکتوریلی << متعالی*
هم‌ارزی رشته اعداد: $1^{p}+2^{p}+\cdots+n^{p} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$
هم‌ارزی براکتی: $[f(x)] \overset{f(x)\to\infty}{\sim} f(x)$
هم‌ارزی رادیکالی: $\sqrt[n]{ax^{n}+bx^{n-1}+\cdots+c} \overset{x\to\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$

تمرین ۱۲

هرگاه $\left[\frac{1}{x^{2}\sin\frac{1}{x^{2}+1}}\right]\left(x^{2}\sin\frac{1}{x^{2}+1}\right)$ ، $L=\lim\limits_{x\to 0}$ آنگاه L برابر است با: (نساجی - ۸۵)

۱) $L=0$ ۲) $L=1$ ۳) $L=\sin 1$ ۴) $L=\frac{1}{\sin 1}$

راهنمایی: با جایگذاری $x=0$ در عبارت موردنظر، ($0\times$کراندار $=0$) $\lim\limits_{x\to 0} x^{2}\sin\frac{1}{x^{2}+1}=0\times$ می‌شود، پس عبارت درون براکت به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و می‌توانیم با توجه به هم‌ارزی براکت‌ها، جزءصحیح را به پرانتز تبدیل کنیم. که در این حالت عبارت صورت و مخرج همدیگر را ساده می‌کنند و $L=1$ می‌شود.

گزینهٔ (۲) صحیح است.

رفع ابهام حالت مبهم $0\times\infty$

روش کلی رفع ابهام این حالت ضربی، بُردن یکی از عامل‌ها به مخرجِ مخرج است.

---

* منظور از تابع متعالی، توابع به فرم $(\text{متغیر})^{\text{متغیر}}$ هستند، که بیشترین رشد را در وادی بی‌نهایت بین همه توابع دارند.

تمرین ۱۲

مقدار $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\log x}{\tan(x+\frac{\pi}{2})}+\dfrac{\log x^2}{\cot x^2}\right)$ کدام است؟ (نساجی - ۸۹)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

حل: با جایگذاری $x=0$ در عبارت موردنظر به تفاضل دو حالت مبهم $(\frac{\infty}{\infty}-\frac{\infty}{\infty})$ می‌رسیم که با تبدیل $(\tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x)$ و بردن هر دو $\cot$ در مخرج‌ها به صورت و تبدیل کردن آنها به $\tan$ و نوشتن هم‌ارزی معروف $\tan$ حاصل حد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x^2}{\cot x^2}+\frac{\log x}{-\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\tan x^2\log x^{\boxed{2}}-\tan x\log x$$

$$\overset{\tan u\overset{u\to 0}{\sim} u}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0^+}(2x^2\log x-x\log x)\xrightarrow{\lim_{x\to 0^+}x^\alpha\log x=0}0-0=0$$

توجه: برای محاسبه $\lim_{x\to 0^+}x\log x=0\times\infty$ ، با بردن x به مخرج، رفع ابهام را با روش هوپیتال انجام می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HoP}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x\ln 10}}{-\frac{1}{x^2}}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}x\log x=0$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکات

۱) در رفع ابهام حالت $0\times\infty$، یا عامل صفرکننده را معکوس می‌کنیم و به مخرج می‌بریم تا به حالت $\frac{\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ برسیم، یا عامل بی‌نهایت کننده را با معکوس کردن به مخرج می‌بریم که به حالت $\frac{0}{0}=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ برسیم. سپس حالات مبهم مقدماتی $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ را رفع ابهام می‌کنیم.

۲) حاصل حد کاربردی زیر را به خاطر بسپارید:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}x^\alpha\ln x=0}$$

تمرین ۱۴

مقدار $\lim_{x\to 0^+}\ln x\ln(\cosh x)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - آزاد ۸۸)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ∞ ۴) $\frac{1}{e}$

راهنمایی: با جایگذاری $x=0$ چون $\cosh 0=1$ است، به حالت مبهم بی‌نهایت در صفر می‌رسیم:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x \ln(\cosh x) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \ln 0^+ \times \ln(\overset{1}{\cosh 0}) = -\infty \times 0 \quad \text{مبهم}$$

برای رفع ابهام این حالت مبهم با توجه به بسط مک‌لورن تابع کسینوس هیپربولیک $(\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)$، و هم‌ارزی تابع لگاریتمی، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\cosh x \overset{x\to 0}{\sim} 1+\frac{x^2}{2} \Rightarrow \ln(\cosh x)\sim \ln(1+\frac{x^2}{2}) \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}} \text{حاصل حد} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2}\ln x \xlongequal{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0} 0$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

رفع ابهام حالت مبهم $\infty-\infty$

یکی از حالات مبهم حدی که در توابع تفاضلی اتفاق می‌افتد حالت $\infty-\infty$ است، که روش‌های رفع ابهام آن براساس نوع تابع (کسری باشد یا رادیکالی) انتخاب می‌شود.

تمرین ۱۵

حد تابع $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$ کدام است؟ (ریاضی - آزاد ۸۶)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

حل: با جایگذاری $x=0$ به حالت مبهم $\infty-\infty$ می‌رسیم که برای رفع ابهام آن ابتدا $\cot^2 x$ را با بردن به مخرج به $\tan^2 x$ تبدیل می‌کنیم و چون عبارت کسری تفاضلی است، برای رفع ابهام مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)=\infty-\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} (\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x})=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x - x^2}{x^2\tan^2 x}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x - x)(\tan x + x)}{x^2\tan^2 x}\sim \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{x^3}{3})(x+x)}{x^2(x^2)}=\frac{2}{3}$$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته حالت $\infty-\infty$، معمولاً یا در توابع به فرم **کسری تفاضلی** یا در توابع به فرم **رادیکالی تفاضلی** اتفاق می‌افتد. که برای رفع ابهام آن درحالت اول از مخرج مشترک‌گیری و در حالت دوم از یکی از دو روش هم‌ارزی رادیکالی یا ضرب و تقسیم در اتحاد رادیکالی استفاده می‌کنیم.

تمرین ۱۶

اگر $\lim_{x\to +\infty} (ax+b-\sqrt{x^2-4x})=0$ باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟ (هواشناسی - ۸۵)

۱) $(-1,2)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(-1,-2)$ ۴) $(1,-2)$

راهنمایی: چون در این سؤال به حالت $(\infty-\infty)$ در یک تابع رادیکالی تفاضلی برخوردیم، برای رفع ابهام از هم‌ارزی رادیکالی استفاده می‌کنیم و a و b را چنان انتخاب می‌کنیم تا جملات به گونه‌ای با هم ساده شده و حاصل حد صفر شود.

$$\text{حد داده شده} \xrightarrow{\sqrt{x^2-4x} \overset{x\to\infty}{\sim} \left|x+\frac{-4}{2}\right| = |x-2|} \lim_{x\to+\infty}(ax+b-|x-2|)=0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت قدرمطلق}} \lim_{x\to+\infty}(ax+b-x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

رفع ابهام حالات مبهم 0^0 و ∞^0

حالات مبهمی که معمولاً در توابع توان‌دار اتفاق می‌افتد که برای رفع ابهام این حالات مبهم نمایی، از خاصیت توان‌شکنی لگاریتم استفاده کرده و از طرفین ln می‌گیریم.

تمرین ۱۷

حاصل $\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}$ کدام است؟ (مواد – ۹۰)

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) $+\infty$

حل: با جایگذاری $x=0$ در حد موردنظر به حالت مبهم 0^0 می‌رسیم که با تبدیل عبارت نمایی به صورت زیر، آن را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\tan x)} \sim \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln x}{\ln x}} = e$$

که در محاسبات فوق از هم‌ارزی $x \overset{x\to 0}{\sim} \tan x$ استفاده کردیم.

گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکات

۱) برای رفع ابهام حالت‌های 0^0 و ∞^0 تبدیل زیر را انجام می‌دهیم:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln(f(x))}}$$

۲) تنها حالات 0^0، ∞^0 و 1^∞ حالات مبهم نمایی هستند و هیچ حالت نمایی دیگری مبهم نیست. مثلاً $0^\infty=0$ است (مبهم نیست) یا $+\infty^{+\infty}$ نیز حالت مبهم نیست و حاصل آن $+\infty$ است. از طرفی $(-\infty)^{+\infty}$ وجود ندارد چون حاصل آن $\pm\infty$ می‌تواند باشد. از سوی دیگر $+\infty^{-\infty}$ (یا همان $\frac{1}{+\infty^{+\infty}}$) برابر صفر است و این حالت نیز، مبهم نمایی محسوب نمی‌شود.