مقدمه و راهنمای مطالعهٔ این کتاب:

از آنجاکه درس ریاضی عمومی ۱ و ۲ یکی از سرفصل‌های اصلی آزمون‌های ورودی کارشناسی ارشد و دکتری رشته‌های فنی مهندسی است، اگر کسب نمره بالا در سال‌های قبل یک مزیت محسوب می‌شد، در حال حاضر یک ضرورت است. با توجه به افزایش رقابت بین داوطلبان برای ورود به دانشگاه‌های برتر کشور، نه تنها لازم است که سرمایه‌گذاری کافی از لحاظ زمانی برای کسب موفقیت در این رقابت انجام شود، بلکه انتخاب راهبرد مناسب در نوع مطالعه و انتخاب مطالبی که خوانده می‌شوند، از آن مهمتر است. پس در حال حاضر مطالعه هدفمند و استفاده از زمان اهمیت زیادی دارد.
اکثر داوطلبان متقاضی ورود به مقطع کارشناسی ارشد و دکتری به‌دلایلی همچون اشتغال، تعداد زیاد مواد امتحانی، دانشجو بودن و غیره، زمان بسیار محدودی دارند. تلاش ما در نگارش این کتاب کاهش زمان مطالعه داوطلب و همچنین آموزش بهینه نکات و تست‌های درس ریاضی عمومی ۱ و ۲ بوده است. این کتاب با رویکرد پوشش تمامی نکات ریاضی عمومی ۲ در قالب ۳۰۰ تست منتخب از سؤالات آزمون‌های سال‌های اخیر نگارش شده است، که ۱۵۰ تست آن بیانگر نکته خاصی است و ۱۵۰ تست بعدی، تکمیل‌کننده تست اول هستند و برای تثبیت یادگیری تست‌ها، تمرین خوبی محسوب می‌شوند.
در ابتدای هر فصل یک نمودار درختی از مفاهیم آن آورده شده، که پیشنهاد می‌شود برای ایجاد چارچوب ذهنی مناسب، با دقت مطالعه شود. سپس با شروع فصل تیترهای اصلی براساس این نمودار درختی معرفی شده‌اند و برای هر قسمت یک معرفی کوتاه آمده است و در ادامه، تست الگو (تستی که نکته بعد از خود را معرفی می‌کند و با شماره فرد و تیتر آبی نشان داده شده) با پاسخ کاملاً تشریحی آمده است، بعد نکته تست بیان می‌شود و سپس تست با شماره زوج و تیتر مشکی می‌آید که برای تثبیت تست قبلی و نکته مربوط به آن است و پاسخ مربوط به آن لزوماً تشریحی نیست و در حدی است که خواننده را برای حل سؤال راهنمایی کند (هر چند در آن سوالاتی که احتمال داده شده که نکته‌ای در حل داشته باشد و خواننده ممکن است با آن برخورد کند، پاسخ تست تشریح شده است).
پیشنهاد می‌شود پیش از مطالعه تست‌ها و نکات این کتاب، پیش زمینه‌ای در مفاهیم اساسی با مطالعه کتاب‌های درسی ایجاد کنید و از این کتاب برای جمع‌بندی استفاده شود.
در صورتی‌که در مطالعه کتاب با مشکلی برخورد کردید یا پیشنهادی در رابطه با بهبود روند کتاب دارید، می‌توانید از یکی از راه‌های زیر با مؤلف یا ناشر در ارتباط باشید:
سایت انتشارات سری عمومی: www.serieomomi.ir
سایت شخصی مؤلف: www.shokrzad.com
در آخر از زحمات تمامی دوستانی که دلسوزانه در نگارش این کتاب کمک رساندند، از جمله آقایان دکتر آهنگر، دکتر فرقانی، مهندس محمد شکرزاد، مهندس حامد معافی و سرکار خانم نجفی صمیمانه تشکر داشته و این کتاب را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

رضا شکرزاد

فهرست

تمرین ۱۲۵

مقدارانتگرال $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy\, dx$ کدام است؟ (۹۴ـ MBA)

۱) $\frac{1}{2}(e-1)$ ۲) $\frac{1}{2}(e+1)$ ۳) $\frac{1}{2}e$ ۴) e

● **راهنمایی:** مشابه تست قبل، به دلیل پیچیدگی تابع تحت انتگرال نسبت به المان داخلی از تعویض ترتیب استفاده می‌کنیم که با طی کردن مراحل به انتگرال زیر می‌رسیم:

$$I = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx\, dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2}(e-1)$$

گزینهٔ (۱) صحیح است.

ب) انتگرال دوگانه در دستگاه قطبی

تمرین ۱۲۶

مقدار انتگرال دوگانهٔ dA $\iint_R \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ روی ناحیهٔ $R = \{(x,y) \mid \frac{\pi^2}{16} \le x^2+y^2 \le \frac{\pi^2}{9}\}$ کدام است؟

(فلسفه علم ـ ۹۳)

۱) $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\pi(\sqrt{2}+1)$ ۳) $\pi(\sqrt{2}-1)$ ۴) $\pi(\frac{\sqrt{2}+1}{2})$

● **حل:** چون در تابع تحت انتگرال و در ناحیه انتگرال‌گیری عبارت (x^2+y^2) ظاهر شده است، از تبدیل قطبی برای حل انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$R \text{ ناحیه}: \frac{\pi^2}{16} < r^2 < \frac{\pi^2}{9} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{فضای بین دو دایره}} 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل قطبی}} I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin r}{r}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi(-\cos r)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -2\pi(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\sqrt{2}-1)\pi$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکات

۱) هرگاه در انتگرال دوگانه، در تابع تحت انتگرال یا در ناحیه انتگرال‌گیری، عامل (x^2+y^2) ظاهر شود، بهتر است که روش قطبی را برای حل انتگرال مورد نظر انتخاب کنیم.

۲) در تبدیل دکارتی به قطبی جایگذاری‌های زیر را داریم:

حدود کل فضای $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ ، المان انتگرال‌گیری: $dA = r dr d\theta$ ، تابع تحت انتگرال: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$

۳) **تعیین حدود r:** یک فلش (شعاع حامل) از مبدأ به سمت بیرون رسم می‌کنیم، اولین قسمتی که وارد ناحیه می‌شویم، کران پائین r و آخرین قسمتی که از ناحیه خارج می‌شویم کران بالای r است.

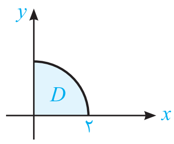
تعیین حدود θ: از راستای مثبت محور xها در جهت مثلثاتی حرکت می‌کنیم تا وارد ناحیه شویم (کران پائین) و در نهایت از ناحیه خارج شویم (کران بالا).

تمرین ۴۲۳

فرض کنید A بخشی از درون دایره $x^۲+y^۲=۴$ است که $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$، مقدار انتگرال $I=\iint_A \dfrac{(x+y)\,e^{(x^۲+y^۲)}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\,dA$ کدام است؟ (شیمی نساجی - ۹۳)

۱) $۲e^۴+۱$ ۲) $۲e^۴-۱$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۲}(e^۴-۱)}{۲}$ ۴) $e^۴-۱$

راهنمایی: چون جمله $x^۲+y^۲$ در انتگرال ظاهر شده است، از روش قطبی برای حل آن استفاده می‌کنیم.



$$I=\int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{r=۰}^{۲}\frac{(r\cos\theta+r\sin\theta)e^{r^۲}}{r}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\left(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\right)\left(\int_۰^۲ re^{r^۲}\,dr\right)$$

$$=(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}e^{r^۲}\right)\Big|_{r=۰}^{۲}=(۲)\left(\frac{۱}{۲}\right)(e^۴-۱)=e^۴-۱$$

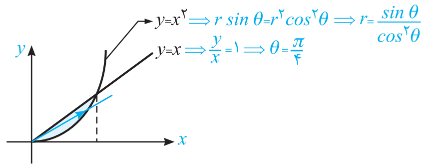
گزینهٔ (۴) صحیح است.

تمرین ۴۲۴

مقدار انتگرال $\int_۰^۱\left[\int_{x^۲}^{x}(x^۲+y^۲)^{-\frac{۱}{۲}}\,dy\right]dx$ برابر با چیست؟ (عمران - ۸۵)

۱) $\sqrt{۲}+۱$ ۲) $۲\sqrt{۲}-۱$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $۲\sqrt{۲}-۲$

حل: به‌دلیل ظاهر شدن عامل $(x^۲+y^۲)$ تحت انتگرال، از تبدیل قطبی برای حل انتگرال استفاده می‌کنیم.



$$I=\int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{r=۰}^{\frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta}}(r^۲)^{-\frac{۱}{۲}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow I=\int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta}\,d\theta=\frac{۱}{\cos\theta}\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\sqrt{۲}-۱$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

تمرین ۴۲۵

مقدار انتگرال $\iint_R \dfrac{dx\,dy}{x^۲+y^۲+۱}$ که در آن R ناحیه $x^۲+y^۲\leq ۱,\ y\geq ۰$ است، کدام است؟ (معدن - ۹۴)

۱) $\pi\ln۲$ ۲) $\dfrac{\pi}{۲}\ln۲$ ۳) $\dfrac{\pi}{۲}$ ۴) π

راهنمایی: با توجه به این‌که ناحیه نیم‌دایره بالای محور xها است و $(x^۲+y^۲)$ در تابع تحت انتگرال ظاهر شده، از تبدیل قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_۰^{\pi}\int_۰^۱\frac{r\,dr\,d\theta}{۱+r^۲}=\left(\int_۰^{\pi}d\theta\right)\left(\int_۰^۱\frac{r\,dr}{۱+r^۲}\right)=\frac{\pi}{۲}\ln۲$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین ۶۲

انتگرال $\int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$ برابر کدام انتگرال قطبی زیر است؟ (فلسفه علم ـ ۸۴)

۱) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{-r^2}\,dr\,d\theta$

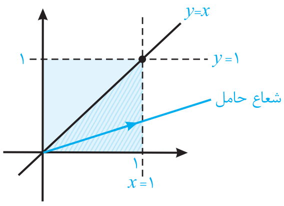
۲) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$

۳) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sec\theta} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$

۴) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$

● حل: چون ناحیه در راستای r نامنظم است، ناحیه را به دو بخش منظم تقسیم می‌کنیم.

همچنین به دلیل تقارن ناحیه و هم رفتاری x و y در تابع تحت انتگرال، انتگرال بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ را حساب می‌کنیم و حاصل را دو برابر می‌کنیم.



حدود r :

$r_1 = 0$ با رسم شعاع حامل بلافاصله وارد ناحیه شدیم.

$r_2 = ? \Rightarrow x = 1 \Rightarrow r\cos\theta = 1 \Rightarrow r_2 = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ از خط $x = 1$ از ناحیه خارج شدیم

حدود θ :

$\theta_1 = 0$ با حرکت از راستای افق در جهت مثلثاتی بلافاصله وارد ناحیه شدیم.

$\theta_2 = ? \Rightarrow y = x \Rightarrow r\cos\theta = r\cos\theta \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4}$ از خط $y = x$ از ناحیه خارج شدیم

$$I = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{\sec\theta} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

تمرین ۶۳

انتگرال $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$ برابر با کدام است؟ (مواد ـ ۹۴)

۱) $\int_0^1 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy$

۲) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$

۳) $\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx$

۴) $\int_0^1 \int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx$

● راهنمایی: مطلوب سؤال تبدیل یک انتگرال قطبی به دکارتی است که اگر دقت کنید دقیقاً عکس تست قبل است و همان ناحیه را معرفی می‌کند.
گزینهٔ (۲) صحیح است.

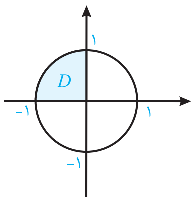
تمرین ۲۲۷

میانگین تابع $z=\sin(x^2+y^2)$ در قسمتی از دایره واحد $x^2+y^2=1$ واقع در ربع دوم صفحه مختصات عبارت است از:

۱) $1-\cos 1$ ۲) $\frac{\pi(1-\cos 1)}{2}$ ۳) $1-\sin 1$ ۴) $\frac{\pi(1-\sin 1)}{4}$ (نساجی - ۹۱)

حل:

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_D z\,dA}{\iint\limits_D dA}=\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^1 \sin(r^2)\,r\,dr\,d\theta}{S_D}$$



$$\xrightarrow{\text{مساحت ربع دایره}}\ \bar{z}=\frac{(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta)(\int_0^1 r\sin r^2\,dr)}{\frac{1}{4}\pi}=\frac{(\frac{\pi}{2})(-\frac{1}{2}\cos r^2)\Big|_0^1}{\frac{\pi}{4}}=1-\cos 1$$

گزینه (۱) صحیح است.

نکته اگر در یک انتگرال دوگانه، عبارت $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ در تابع تحت انتگرال یا در ناحیه انتگرال‌گیری ظاهر شود، از روشی مشابه تبدیل قطبی به نام **تبدیل بیضی (یا شبه قطبی)** استفاده می‌کنیم، که در آن تبدیلات لازم به صورت زیر است:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases},\quad dA=abr\,dr\,d\theta}$$

تمرین ۲۲۸

مقدار انتگرال $I=\iint\limits_D x^2\,dx\,dy$ که در آن D، ناحیه محصور به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ کدام است؟ (عمران ـ ۸۰)

۱) $\frac{\pi a^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi a^3 b}{4}$ ۳) $\frac{\pi a^2 b}{4}$ ۴) $\frac{\pi a^2}{4}$

راهنمایی: با توجه به ظاهر شدن $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ در ناحیه انتگرال‌گیری، با کمک روش بیضی، داریم:

$$I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} a^2r^2\cos^2\theta\,abr\,dr\,d\theta=a^3b\,\underbrace{(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta)}_{\pi}\underbrace{(\int_0^1 r^3\,dr)}_{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{4}a^3b$$

توجه شود که چون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$، پس $r=1$ است و چون یک بیضی کامل داریم، پس $0\le\theta\le 2\pi$ است.

گزینه (۲) صحیح است.

ج) روش تغییرمتغیر برای حل انتگرال دوگانه

تمرین ۲۲۹

حاصل انتگرال $\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$ در ناحیه محدود به منحنی‌های $x^2-y^2=1$ ، $x^2-y^2=9$ ، $xy=2$ و $xy=4$ کدام است؟ (عمران نقشه‌برداری - ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

حل: با توجه به اینکه ناحیه در راستای هیچ‌کدام از محورها، نظم ندارد، از روش تغییرمتغیر استفاده می‌کنیم.

$$u=x^{۲}-y^{۲}\xrightarrow{۱\le x^{۲}-y^{۲}\le ۹}۱\le u\le ۹\qquad,\qquad v=xy\xrightarrow{۲\le xy\le ۴}۲\le v\le ۴$$

ژاکوبین تبدیل دستگاه x و y به u و v را محاسبه می‌کنیم.

$$J=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}۲x & -۲y\\ y & x\end{vmatrix}}=\frac{۱}{۲x^{۲}+۲y^{۲}}=\frac{۱}{۲(x^{۲}+y^{۲})}$$

$$I=\iint_D (x^{۲}+y^{۲})\,dx\,dy \overset{\text{تغییر متغیر}}{=\!=\!=} \int_{۲}^{۴}\int_{۱}^{۹}\cancel{(x^{۲}+y^{۲})}\cdot\frac{۱}{۲\cancel{(x^{۲}+y^{۲})}}\,du\,dv$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{۲}^{۴}\int_{۱}^{۹}du\,dv=\frac{۱}{۲}\left(\int_{۲}^{۴}dv\right)\left(\int_{۱}^{۹}du\right)=\frac{۱}{۲}(۲)(۸)=۸$$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکات

۱) در حالت‌های زیر می‌توان از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

الف) اگر ناحیه انتگرال‌گیری در راستای هیچ‌کدام از متغیرهایش منظم نباشد و عبارت $(x^{۲}+y^{۲})$ ظاهر نشده باشد.

ب) اگر تابع تحت انتگرال با تعویض ترتیب المان نیز پیچیدگی‌اش از بین نرود.

۲) در حالت «ب» نکته قبل به‌طور معمول توابعی شبیه توابع زیر ظاهر می‌شوند:

$$\xrightarrow{\text{مثال}}\ \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\ \text{یا}\ (x-y)\sqrt{x+۲y}\ \text{یا}\ e^{\frac{x}{x+y}}$$

۳) مراحل محاسبات در روش تغییرمتغیر به صورت زیر است:

گام اول: با توجه به تابع تحت انتگرال و معادله مرزهای آن، دو متغیر جدید $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ را انتخاب می‌کنیم.

گام دوم: ژاکوبین تبدیل دستگاه x و y به دستگاه u و v را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} & \boxed{\frac{\partial u}{\partial y}}\\ \boxed{\frac{\partial v}{\partial x}} & \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}}\end{vmatrix}}\Rightarrow \text{را به‌دست‌می‌آوریم}\ |J|$$

مشتق u نسبت به y
مشتق u نسبت به x
مشتق v نسبت به y
مشتق v نسبت به x

در واقع ژاکوبین، مشتق متغیرهای قدیمی (x,y) نسبت به متغیرهای جدید (u,v) است، ولی چون معمولاً در صورت سؤال‌ها، ما u و v را برحسب x و y داریم، از معکوس مشتق متغیرهای جدید به قدیمی استفاده می‌کنیم.

گام سوم: بازنویسی مرزها برحسب متغیرهای جدید (یعنی u و v).

گام چهارم: پس از انجام روند فوق، به یک انتگرال نسبتاً ساده‌تر در فضای جدید u و v می‌رسیم که با تکنیک‌های قبلی می‌توان آن را حل کرد.

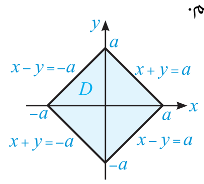
تمرین 180

مقدار انتگرال $\iint\limits_{|x|+|y|\le a} e^{x+y}\,dx\,dy$ برابر با چیست؟ (عمران نقشه‌برداری - ۸۸)

۱) $a\sinh a$ ۲) $2a\sinh a$ ۳) $4a\sinh a$ ۴) $\frac{1}{2}a\sinh a$

راهنمایی: با رسم ناحیهٔ انتگرال‌گیری به ناحیه‌ای نامنظم می‌رسیم که می‌توانیم تغییرمتغیرهای زیر را براساس کران‌های ناحیه انتخاب کنیم.

$$|x|+|y|=a \Rightarrow \begin{cases} x+y=a & x,y>0 \\ -x+y=a & x<0,\ y>0 \\ -x-y=a & x,y<0 \\ x-y=a & x>0,\ y<0 \end{cases} \Rightarrow$$



با توجه به تابع تحت انتگرال و تکرار مرزها می‌توان از ایدهٔ تغییرمتغیر در حالت کلی استفاده کرد:

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیرها}} \begin{cases} u=x+y \xrightarrow{-a\le x+y\le a} -a\le u\le a \\ v=x-y \xrightarrow{-a\le x-y\le a} -a\le v\le a \end{cases}$$

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=-\frac{1}{2} \Rightarrow dx\,dy=|J|\,du\,dv=\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$\Rightarrow \text{انتگرال داده شده} \xlongequal{\text{تغییر متغیر}} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{u}\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} dv\times\int_{-a}^{a} e^{u}du=\frac{1}{2}\left(v\Big|_{-a}^{a}\right)\left(e^{u}\Big|_{-a}^{a}\right)=\frac{1}{2}(2a)\times(e^{a}-e^{-a})=2a\sinh a$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین 181

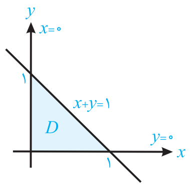
مقدار انتگرال $\int_0^1\int_0^{1-x}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dy\,dx$ برابر است با: (عمران - ۸۷)

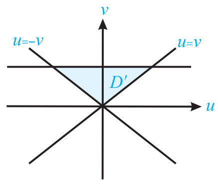
۱) $\sin 1$ ۲) $\frac{3}{2}\sin 1$ ۳) $\frac{1}{2}\sin 1$ ۴) $2\sin 1$

حل: با انتخاب تغییر متغیرهای زیر داریم:

$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases} \Rightarrow |J|=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

$$\text{کران‌های فعلی}: \begin{cases} 0\le y\le 1-x \xrightarrow{\text{روی مرز متغیر}} x+y=1 \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$$





$\Rightarrow$ کران‌های جدید روی مرزها: $\begin{cases} x=۰ \Rightarrow u=-v \\ y=۰ \Rightarrow u=v \\ ۰\le x+y\le ۱ \Rightarrow ۰\le v\le ۱ \end{cases}$

$$I=\int_{v=۰}^{۱}\int_{u=-v}^{v} cos(\frac{u}{v})\underbrace{(\frac{۱}{۲})}_{|J|}\,du\,dv$$

چون ناحیه نسبت به u متقارن است و تابع تحت انتگرال نسبت به u زوج است، داریم:

$$I=\underbrace{(\frac{۱}{۲})}_{|J|}\overbrace{(۲)}^{\text{تقارن}}\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{v} cos(\frac{u}{v})\,du\,dv=\int_{۰}^{۱}(v\,sin\frac{u}{v})\Big|_{۰}^{v}dv=\int_{۰}^{۱}(sin۱)\,v\,dv=\frac{۱}{۲}sin۱$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته جهت تعیین حدود انتگرال جدید در روش تغییرمتغیر، روی تک‌تک **مرزهای** ناحیه قبلی حرکت می‌کنیم.

تمرین ۲۸

مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}\sqrt{x+y}\,(y-۲x)^{۲}dy\,dx$ برابر با چیست؟ (نقشه‌برداری ـ ۸۶)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

● راهنمایی: با انتخاب $\begin{cases} u=x+y \\ v=y-۲x \end{cases}$، حاصل ژاکوبین تبدیل $|J|=\frac{۱}{۳}$ می‌شود و با حرکت روی مرزهای فعلی تبدیل کران‌های جدید به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x=۰ \xrightarrow{u=y\ ,\ v=y} v=u \\ y=۰ \xrightarrow{u=x\ ,\ v=-۲x} v=-۲u \\ ۰\le x+y\le ۱ \xrightarrow{u=x+y} ۰\le u\le ۱ \end{cases} \Rightarrow I=\int_{u=۰}^{۱}\int_{v=-۲u}^{u}\sqrt{u}\,(v)^{۲}(\frac{۱}{۳})\,dv\,du=\frac{۲}{۹}$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

تمرین ۲۹

اگر $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}: x^{۲}-xy+y^{۲}\le ۲\}$ مقدار انتگرال دوگانهٔ $\iint_{D}(x^{۲}-xy+y^{۲})\,dA$ روی ناحیهٔ D با تبدیل $\begin{cases} x=u\sqrt{۲}-v\sqrt{\frac{۲}{۳}} \\ y=u\sqrt{۲}+v\sqrt{\frac{۲}{۳}} \end{cases}$ برابر است با: (فلسفه علم ـ ۸۹)

۱) $\frac{۴\pi}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

حل: به پیشنهاد خود سؤال از روش تغییرمتغیر استفاده می‌کنیم. ژاکوبین تبدیل مورد نظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\xrightarrow{\text{ژاکوبین تبدیل دستگاه}} |J| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{۲} & -\sqrt{\frac{۲}{۳}} \\ \sqrt{۲} & \sqrt{\frac{۲}{۳}} \end{vmatrix} = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

با جایگذاری تغییرمتغیرهای داده شده، تابع تحت انتگرال و ناحیه به‌صورت زیر تغییر پیدا می‌کنند.

$$x^۲ - xy + y^۲ = (\sqrt{۲}\,u - \sqrt{\frac{۲}{۳}}\,v)^۲ - (\sqrt{۲}\,u - \sqrt{\frac{۲}{۳}}\,v)(\sqrt{۲}\,u + \sqrt{\frac{۲}{۳}}\,v) + (\sqrt{۲}\,u + \sqrt{\frac{۲}{۳}}\,v)^۲ = ۲u^۲ + ۲v^۲$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیه جدید}} ۲u^۲ + ۲v^۲ \le ۲ \Rightarrow u^۲ + v^۲ \le ۱ \Rightarrow D' : \text{داخل و روی محیط دایره‌ای به‌شعاع ۱}$$

$$I = \iint\limits_{u^۲+v^۲\le ۱} (۲u^۲ + ۲v^۲)\left(\frac{۴}{\sqrt{۳}}\right) du\,dv \xlongequal{\text{تبدیل قطبی}} \frac{۸}{\sqrt{۳}} \int_{\theta=۰}^{۲\pi} \int_{r=۰}^{۱} r^۲ . r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{۸}{\sqrt{۳}} \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_۰^۱ r^۳ dr\right) = \frac{۸}{\sqrt{۳}} (۲\pi)\left(\frac{۱}{۴}\right) = \frac{۴\pi}{\sqrt{۳}}$$

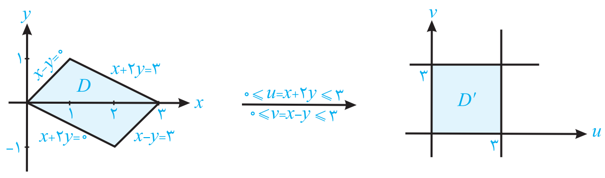
گزینهٔ (۱) صحیح است.

تمرین 481

اگر R یک متوازی‌الاضلاع با رئوس $(۰,۰)$ ، $(۱,۱)$ ، $(۲,-۱)$ ، $(۳,۰)$ باشد، حاصل انتگرال $\iint\limits_R (x+۲y)^۲ e^{(x-y)} dA$ کدام است؟ (عمران ـ ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۳}(e^۳ - ۱)$ ۲) $۳(e^۳ - ۱)$ ۳) $\frac{۱}{۹}(e^۳ - ۱)$ ۴) $۹(e^۳ - ۱)$

راهنمایی: با انتخاب تغییرمتغیرهای $u = x + ۲y$ و $v = x - y$ به‌دست می‌آید، $|J| = \frac{۱}{۳}$ و داریم:



$$\Rightarrow I = \int_۰^۳ \int_۰^۳ u^۲ e^v \left(\frac{۱}{۳}\right) du\,dv = \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{u^۳}{۳}\right)\Bigg|_۰^۳ (e^v)\Bigg|_۰^۳ = ۳(e^۳ - ۱)$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

د) گشتاورها و مرکز جرم جسم دوبعدی

تمرین 482

گشتاور ماند سطح بیضی $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ حول محور y ها برابر است با: (ژئوفیزیک ـ ۸۶)

۱) $\frac{\pi ab}{۳}$ ۲) $\frac{\pi a^۲ b^۲}{۴}$ ۳) $\frac{\pi a^۳ b}{۴}$ ۴) $\frac{\pi a^۲ b^۲}{۸}$

● **حل:** برای محاسبه گشتاور ماند (گشتاور مرتبه دوم) حول oy از فرمول زیر استفاده می‌کنیم، که چون در صورت سؤال اشاره‌ای به چگالی نشده، $(\delta = 1)$ در نظر می‌گیریم.

$$\text{گشتاور ماند حول } oy: \ I_y = \iint_D x^2 \overset{1}{\delta(x,y)}\, dA = \iint_{\text{بیضی به شعاع ۱}} x^2 dA = \text{حل تست ۱۷۸} = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکات

۱) اگر D سطح یک ورقه‌ی نازک فلزی و چگالی سطحی در هر نقطه از آن $\delta(x,y)$ باشد، آن‌گاه:

$$\text{جرم ورقهٔ } D: \ M = \iint_D \delta(x,y)\, dA$$

$$\text{مرکز جرم ورقه}: \ \bar{x} = \frac{\iint_D x\,\delta(x,y)\,dA}{\iint_D \delta(x,y)\,dA} = \frac{M_y}{M} \ , \ \bar{y} = \frac{\iint_D y\,\delta(x,y)\,dA}{\iint_D \delta(x,y)\,dA} = \frac{M_x}{M}$$

که در این روابط M_y گشتاور اول نسبت به محور yها و M_x گشتاور اول نسبت به محور xهاست.

گشتاور ماند (ممان اینرسی):

$$\text{حول } ox: \ I_x = \iint_D y^2 \delta(x,y)\, dA$$

$$\text{حول } oy: \ I_y = \iint_D x^2 \delta(x,y)\, dA$$

$$\text{حول مبدأ}: \ I_o = \iint_D (x^2+y^2)\, \delta(x,y)\, dA$$

۲) اگر در سؤالی چگالی داده نشود، آن را یک در نظر می‌گیریم. $(\delta = 1)$

تمرین ۱۸۵

گشتاور سطح نیم‌دایره $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ نسبت به خط $y = -a$ چند برابر a^3 است؟ (ژئوفیزیک ـ ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ ۲) $\pi + \frac{1}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$ ۴) $\pi + \frac{2}{3}$

● **راهنمایی:** گشتاور حول $y = -a$ معادل گشتاور حول $y = 0$ یعنی محور افقی xهاست که با M_x نشان می‌دهیم و از رابطه $\iint_D y\, dA$ به دست می‌آید.

$$M_{y=-a} = \iint_D (y+a)\, dA = \iint_D y\, dA + a\iint_D dA = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a} (r\sin\theta) r\, dr\, d\theta + aS_D$$

$$= \frac{2}{3}a^3 + \frac{\pi}{2}a^3 = (\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2})a^3$$

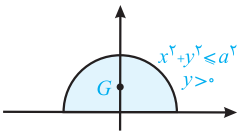
گزینهٔ (۳) صحیح است.

تمرین ۱۸۶

مرکز جرم ناحیه $y \geq 0, a > 0$ و $x^2 + y^2 \leq a^2$ کدام است؟ (سیستم ـ ۸۴)

۱) $(0, \frac{a}{2})$ ۲) $(0, \frac{4a}{3\pi})$ ۳) $(\frac{4a}{3\pi}, 0)$ ۴) $(\frac{2a}{3\pi}, \frac{2a}{3\pi})$

حل: ناحیه موردنظر یک نیم‌دایره بالای محور xها با شعاع a است که چون نسبت به محور yها متقارن است $(\bar{x}=0)$ خواهد بود و برای محاسبه $\bar{y}$ داریم:



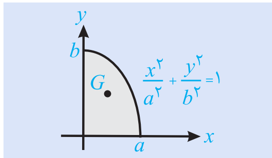
$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\,\delta(x,y)\,dA}{\iint_D \delta(x,y)\,dA}\quad,\quad (\delta(x,y)=1)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل قطبی}}\ \bar{y}=\frac{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a}(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta}{\iint_D dA}=\frac{(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta)(\int_0^{a}r^2dr)}{S_D}=\frac{2(\frac{a^3}{3})}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{4a}{3\pi}$$

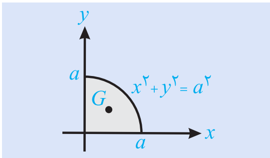
پس مرکز هندسی (مرکز جرم) نیم‌دایره به شعاع a، $G(0,\frac{4a}{3\pi})$ است.

گزینهٔ (۲) صحیح است.

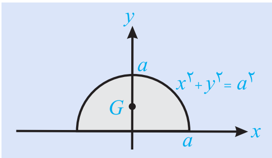
نکته مرکز هندسی نواحی زیر را به خاطر بسپارید



$G\ \left|\ \bar{x}=\frac{4a}{3\pi},\quad \bar{y}=\frac{4b}{3\pi}\right.$



$G\ \left|\ \bar{x}=\frac{4a}{3\pi},\quad \bar{y}=\frac{4a}{3\pi}\right.$



$G\ \left|\ \bar{x}=0,\quad \bar{y}=\frac{4a}{3\pi}\right.$

تمرین 88

میانگین فاصله نقاط ناحیه D ربع قرص $x^2+y^2\le r_0^2$ واقع در ربع اول صفحه مختصات تا خط $x+y=0$، کدام است؟ (مکانیک ـ ۹۴)

۱) $\frac{2\sqrt{2}\,r_0}{3\pi}$ ۲) $\frac{4r_0}{3\pi}$ ۳) $\frac{4\sqrt{2}\,r_0}{3\pi}$ ۴) $\frac{8r_0}{3\pi}$

راهنمایی: هر نقطه دلخواه درون ناحیه D را به فرم کلی (x,y) تعریف می‌کنیم که فاصله آن تا خط $y+x=0$ را $h(x,y)$ می‌نامیم و هدف محاسبه متوسط d است.

$$\text{فاصله نقطه } (x,y) \text{ تا خط } x+y=0:\ h(x,y)=\frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}}\ \xrightarrow[x,y>0]{\text{ربع اول}}\ h(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{h}(x,y)=\frac{\iint_D h(x,y)\,dA}{\iint_D dA}=\frac{\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{2}}\,dA}{S_D}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r_0}(r\cos\theta+r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta}{\underbrace{\boxed{\frac{1}{4}\pi r_0^2}}_{\text{مساحت ربع دایره}}}=\frac{4\sqrt{2}\,r_0}{3\pi}$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.